LEERBOEK WISKUNDE B VWO DEEL 2

# GETAL & RUIMTE

B

Noordhoff

# Getal & Ruimte

## vwo B deel 2

**Twaalfde editie, 2020**

Noordhoff
Groningen

**Auteurs**

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

# Voorwoord

*Aan de docent,*

**Het boek vwo B deel 2**
Samen met de delen 1, 3 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.
De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur. De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken, waarbij opgemerkt kan worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 een keuzeonderwerp wordt aangeboden en dat in het vierde hoofdstuk van deel 4 de examentraining aan bod komt.
De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 30 uur en bevatten leerstof die in het Centraal Eindexamen wordt getoetst.
In hoofdstuk 5 Machten, exponenten en logaritmen worden gedeelten van het domein B behandeld.
De subdomeinen C1 en C2 komen aan de orde in hoofdstuk 6 Differentiaalrekening.
In hoofdstuk 7 Meetkunde met coördinaten staat subdomein E2 centraal.
In hoofdstuk 8 Goniometrische functies wordt het grootste gedeelte van het domein D behandeld.
De delen 1, 2 en 3 zijn bedoeld voor de leerjaren 4 en 5. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over deze twee leerjaren kunnen de hoofdstukken 7 en 8 samen met deel 3 in het vijfde leerjaar worden doorgenomen.

**Opbouw**
De opbouw in deel 2 is dezelfde als in deel 1. Elk hoofdstuk heeft een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor elke nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven en de afsluitende opgaven zijn er nog de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken.
Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

**Drie leerroutes**
In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.
De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken.
In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan.
De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

**Getal en Ruimte online**
Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.
Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

*herfst 2019*

# Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

O2 **Oriëntatie-opgave**
Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 **Reflectie-opgave**
In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 **Extra opgave**
Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

**Route-aanduiding**

1 Basisroute

2 Middenroute

3 Uitdagende route

NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 **Opgaven zonder route-aanduiding**
In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▸ GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▸ WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

[▸ DEMO] Verwijzing naar een demo/animatie.

# Inhoud

# 5

# Machten, exponenten en logaritmen

**Wat leer je?**

- Wat de betekenis is van machten met negatieve en gebroken exponenten.
- Wat een logaritme is.
- Werken met grafieken van machtsfuncties, wortelfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies.
- Variabelen vrijmaken bij machtsformules en bij wortelformules.
- Exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplossen.

# Beginopdracht Newton en Kepler

Het was Newton die de basisvergelijking $F = m \cdot a$ van de mechanica als eerste formuleerde. Hierin is $F$ de kracht die op een lichaam werkt, $m$ de massa van het lichaam en $a$ de versnelling die het lichaam ondervindt.
De eenheid van massa is kg, de eenheid van versnelling is m/s$^2$ en de eenheid van kracht is N (newton). Hieruit volgt dat 1 N = 1 kg $\cdot$ m/s$^2$.
De versnelling die veroorzaakt wordt door de zwaartekracht, wordt voorgesteld door $g$. Deze versnelling is voor (een plaats op) de aarde constant, ongeveer 9,81 m/s$^2$.
De kracht waarmee de aarde een lichaam met massa $m$ aantrekt, wordt aangegeven met $F_Z$. Dus $F_Z = m \cdot g$.
Een voorwerp dat met een constante snelheid een cirkelvormige beweging maakt, ondervindt een kracht in de richting van het middelpunt van de cirkel, de middelpuntzoekende kracht. Hiervoor geldt de formule $F_{\text{mpz}} = \frac{mv^2}{r}$, waarbij $r$ de straal van de cirkel is en $v$ de baansnelheid.
Doorloopt een voorwerp een cirkel met straal $r$ en is de omlooptijd $T$, dan is $v = \frac{\text{omtrek cirkel}}{\text{omlooptijd}} = \frac{2\pi r}{T}$.
Combinatie van de formules $F_{\text{mpz}} = \frac{mv^2}{r}$ en $v = \frac{2\pi r}{T}$ geeft de formule $F_{\text{mpz}} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$.

- Toon dit aan.

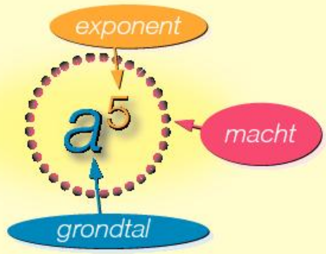
Volgens de Eerste wet van Kepler bewegen alle planeten zich in elliptische banen rond de zon. Voor de meeste planeten zijn deze elliptische banen goed te benaderen door cirkels. We nemen daarom in deze opdracht aan dat de banen cirkels zijn. Volgens de Derde wet van Kepler is het kwadraat van de omlooptijd $T$ van een planeet evenredig met de derde macht van de straal $r$ van de cirkel, dus $\frac{T^2}{r^3} = \text{constant}$.

- De afstand tussen Venus en de zon is ongeveer driekwart keer de afstand tussen de aarde en de zon. De afstand tussen Mars en de zon is ongeveer anderhalf keer de afstand tussen de aarde en de zon.
  Geef een schatting van de lengte van een Venus-jaar en van een Mars-jaar.
- De omlooptijd van Jupiter is ongeveer 12 keer zo groot als die van de aarde.
  Bereken hoeveel keer de afstand tussen Jupiter en de zon is vergeleken met de afstand tussen de aarde en de zon en gebruik dit om te berekenen hoeveel keer zo groot de baansnelheid van Jupiter om de zon is vergeleken met de baansnelheid van de aarde om de zon.

# Voorkennis Herleiden van machten

## Theorie A Rekenregels voor machten

In de macht $a^5$ is $a$ het grondtal en 5 de exponent.
$a^5$ is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, dus voor het product van vijf factoren $a$.




Rekenen met machten gaat als volgt.

| | |
|---|---|
| $a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{\text{2 factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5 factoren}} = a^7$ | Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op. |
| $\dfrac{a^5}{a^2} = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3$ | Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af. |
| $(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{\text{5 factoren } a^2} = a^{10}$ | Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar. |
| $(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{\text{4 factoren } ab} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4b^4$ | Bij de macht van een product krijg je een product van machten. |

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

**Rekenregels voor machten**

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\quad$ $(a^p)^q = a^{pq}$

$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\quad$ $(ab)^p = a^p b^p$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$

$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$

$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$

$a^5 \cdot a^2 + a^5 + a^2 = a^7 + a^5 + a^2$

$\dfrac{12a^3b}{3ab} = 4a^2$

$(-2)^4 = 16$ en $-2^4 = -16$
$(-3)^3 = -27$ en $-3^3 = -27$

Let op: $a^5 \cdot a^2 = a^7$ maar $a^5 + a^2$ kan niet korter.

**1** Herleid.

a $x^2 \cdot x^3$

b $2p^3 \cdot 3p^2$

c $4a^2b \cdot 5a^3b^2$

d $-2p^4q^3 \cdot -3pq$

e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y$

f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

**2** Herleid.

a $(p^2q)^3$

b $(3x^2)^3$

c $(-5x^2y^3)^2$

d $(-4ab^4)^2$

e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$

f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3$

**3** Herleid.

a $\dfrac{12x^6}{4x^2}$

b $\dfrac{5x^{10}}{15x^5}$

c $\dfrac{24a^4b^2}{6ab}$

d $\dfrac{-15p^6q}{5p^2q}$

e $\dfrac{10x^3y^2}{5x^2y}$

f $\dfrac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

**4** Herleid.

a $\dfrac{-28a^6}{7a}$

b $-(3a^4)^2$

c $(-2a^2)^5$

d $(-a^3)^3$

e $(5a)^3 \cdot -3a$

f $\left(\dfrac{9a^4}{a}\right)^2$

**5** Herleid.

a $(ab)^4 \cdot a$

b $(-2ab)^3 \cdot b$

c $(3a)^2 + (2b)^2$

d $(3a)^3 - 8a^3$

e $(\frac{1}{2}a)^2 + (-a)^2$

f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4$

**6** Herleid.

a $a^{2n} \cdot a^{n-1}$

b $a^{n^2-1} \cdot a^{n-1}$

c $\dfrac{a^{n^2-n}}{a^{n-1}}$

# 5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten

**01** In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het = teken een regelmaat herkennen.

**a** Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4}$?

**b** Neem over en vul in: $2^{-3} = \frac{1}{2^{\dots}}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^{\dots}}$.

Op dezelfde manier kun je inzien dat $3^0 = 1$ en $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

**c** Neem over en vul in: voor $x \neq 0$ geldt $x^0 = \dots$, $x^{-1} = \frac{1}{\dots}$ en $x^{-3} = \frac{1}{\dots}$.

| |
|---|
| $2^5 = 32$ |
| $2^4 = 16$ |
| $2^3 = 8$ |
| $2^2 = 4$ |
| $2^1 = \dots$ |
| $2^0 = \dots$ |
| $2^{-1} = \dots$ |
| $2^{-2} = \dots$ |
| $2^{-3} = \dots$ |

## Theorie A Machten met negatieve exponenten

In opgave 1 komen de machten $x^0$ en $x^{-3}$ voor.

Om de betekenis van $x^0$ te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^2}$.

Je weet $\frac{x^2}{x^2} = 1$ voor $x \neq 0$.

Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je

$\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0$.

We spreken daarom af dat $x^0 = 1$ voor $x \neq 0$.

Om de betekenis van $x^{-3}$ te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^5}$.

Je weet $\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$.

Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$.

We spreken daarom af dat $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. En zo is $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$.

Algemeen geldt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

**Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.**

In de opgaven mag je ervan uitgaan dat $a \neq 0$.

Rekenregels voor machten
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
$(a^p)^q = a^{pq}$
$(ab)^p = a^p b^p$

$x^0 = 1$ voor $x \neq 0$.

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ en $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$.

Maar ook $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

en $\frac{1}{x} = x^{-1}$.

**Voorbeeld**

Schrijf als macht van $a$.

**a** $a^2 \cdot \dfrac{1}{a^8}$ **b** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)}{a}$ **c** $\dfrac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2$ **d** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}}$

*Uitwerking*

**a** $a^2 \cdot \dfrac{1}{a^8} = a^2 \cdot a^{-8} = a^{-6}$

**b** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^2}\right)}{a} = \dfrac{a^{-2}}{a^1} = a^{-2-1} = a^{-3}$

**c** $\dfrac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2 = a^{-p} \cdot a^6 = a^{-p+6}$

**d** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}} = \dfrac{a^{-5}}{a^{-n}} = a^{-5--n} = a^{-5+n}$

Je schrijft $5a^{-3}b^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$5a^{-3}b^2 = 5 \cdot \dfrac{1}{a^3} \cdot b^2 = \dfrac{5b^2}{a^3}$

Je mag hierbij de tussenstap weglaten.

Zonder tussenstappen:

$3a^{-2}b^6 = \dfrac{3b^6}{a^2}$

$\frac{3}{5}a^{-2}b^6 = \dfrac{3b^6}{5a^2}$

**Voorbeeld**

Schrijf zonder negatieve exponenten.

**a** $8a^{-5}b^3$ **b** $\frac{2}{5}a^{-2}b$ **c** $(\frac{3}{4}a^3b^{-2})^{-2}$

*Uitwerking*

**a** $8a^{-5}b^3 = \dfrac{8b^3}{a^5}$

**b** $\frac{2}{5}a^{-2}b = \dfrac{2b}{5a^2}$

**c** $(\frac{3}{4}a^3b^{-2})^{-2} = (\frac{3}{4})^{-2} \cdot (a^3)^{-2} \cdot (b^{-2})^{-2} = \dfrac{1}{(\frac{3}{4})^2} \cdot a^{-6} \cdot b^4 = \dfrac{1}{\frac{9}{16}} \cdot \dfrac{b^4}{a^6} = \dfrac{16b^4}{9a^6}$

**2** Schrijf als macht van $a$.

**a** $\dfrac{1}{a^2}$ **d** $\dfrac{a^8}{a^0}$ **g** $\dfrac{a}{a^{12}}$

**b** $a^4 \cdot \dfrac{1}{a^6}$ **e** $(a^3)^{-2}$ **h** $\dfrac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n$

**c** $\dfrac{a^n}{\left(\dfrac{1}{a^4}\right)}$ **f** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^5}\right)}{a}$ **i** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}}$

**3** Schrijf zonder negatieve exponenten.

**a** $6a^{-5}b^3$
**b** $\frac{1}{3}a^{-3}$
**c** $(5a^{-4}b^2)^{-1}$
**d** $\frac{3}{5}a^{-4}$
**e** $(\frac{1}{2}a)^{-3}$
**f** $\frac{1}{6}a^{-2}b^4$
**g** $-4 \cdot (3a)^{-2}$
**h** $(3a)^{-2}b^{-3}$
**i** $(\frac{3}{8}a^{-1}b)^{-2}$

**O4** Uit $(\sqrt{x})^2 = x$ en $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ volgt $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
Licht op dezelfde manier toe dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

## Theorie B Machten met gebroken exponenten

Met de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ lichten we de betekenis van $x^{\frac{1}{5}}$ toe.
Je kiest daartoe $p = \frac{1}{5}$ en $q = 5$.

Je krijgt $(x^{\frac{1}{5}})^5 = x^1 = x$.
Je weet $(\sqrt[5]{x})^5 = x$.
We spreken af dat $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

Algemeen is $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$. Verder is $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ en $x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$.
Maar ook
$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ en
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$.

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \text{ en } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Een macht met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een (hogeremachts)wortel. Zo is
$x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$ en $x^{-\frac{3}{7}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$.

### Voorbeeld

Schrijf als macht van $x$.

**a** $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
**b** $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$
**c** $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

**d** $4a^{-\frac{1}{3}}$
**e** $4a^{2\frac{1}{2}}$
**f** $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

*Uitwerking*

**a** $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

**b** $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{2-\frac{1}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

**c** $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{12}}$

**d** $4a^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{a}}$

**e** $4a^{2\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot \sqrt{a}$

**f** $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{\sqrt{a}}{4 \cdot \sqrt[3]{b^2}}$

**5** Schrijf als macht van $a$.

**a** $a \cdot \sqrt[3]{a}$

**b** $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

**c** $\dfrac{1}{a}$

**d** $\dfrac{1}{a^3}$

**e** $a^2 \cdot \sqrt{a}$

**f** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}$

**g** $\sqrt[3]{a^{12}}$

**h** $\dfrac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a}$

**i** $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a}}$

**6** Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \dfrac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.
Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

**a** $8\sqrt{2}$

**b** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

**c** $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

**d** $\frac{1}{100}\sqrt{10}$

**e** $\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

**f** $10 \cdot \sqrt[3]{0{,}1}$

**A7** Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

**a** $5a^{3\frac{1}{3}}$

**b** $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b$

**c** $3a^{-\frac{2}{3}}$

**d** $\frac{2}{3}a^{-3}b^{1\frac{1}{2}}$

**e** $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$

**f** $(5a)^{-\frac{1}{2}}$

**A8** Schrijf als macht van $x$.

**a** $\dfrac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

**b** $x \cdot \sqrt[7]{x^3}$

**c** $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}$

**d** $x^4 \cdot \sqrt{x}$

**e** $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

**f** $\dfrac{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}}$

**E9** Harry schrijft een rij getallen op. Hij begint met 1 en het tweede getal is 2. Elk getal daarna maakt hij als volgt. Hij deelt het voorlaatst opgeschreven getal door het laatst opgeschreven getal.
Schrijf het tiende getal dat Harry opschrijft als macht van 2.

**10** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

**a** $y = (2x^2)^3 \cdot \dfrac{2}{x^{10}}$

**b** $y = \dfrac{3}{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

**c** $y = 3(\frac{1}{3}x^2)^{-2} \cdot 6x^2$

**d** $y = \dfrac{5}{3x\sqrt{x}}$

**A11** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

**a** $y = \dfrac{5}{x\sqrt{x}}$

**b** $y = 5x\sqrt{x^3}$

**c** $y = \dfrac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x}$

**d** $y = 72x(\frac{1}{4}x\sqrt{x})^3$

**012** Gegeven is de vergelijking $x^{\frac{2}{3}} = 10$.

**a** Verhef het linker- en rechterlid tot de macht $\frac{3}{2}$.

**b** Toon aan dat de oplossing van de vergelijking gelijk is aan $x = 10\sqrt{10}$.

## Theorie C Vergelijkingen met gebroken exponenten

Om de vergelijking $x^{1\frac{1}{2}} = 6$ exact op te lossen, schrijf je eerst de vergelijking als $x^{\frac{3}{2}} = 6$. Vervolgens verhef je het linker- en rechterlid tot de macht $\frac{2}{3}$. Je krijgt $(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}$, dus $x = 6^{\frac{2}{3}}$ oftewel $x = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$.
In het informatief op de volgende bladzijde zie je dat er problemen kunnen ontstaan als je bij machten met gebroken exponenten negatieve grondtallen toestaat. Vandaar dat we bij de vergelijking $x^p = c$ met $p$ een gebroken getal het grondtal $x$ positief nemen.

**Voor $c > 0$ en $x > 0$ geldt $x^{\frac{a}{b}} = c$ geeft $x = c^{\frac{b}{a}}$.**

### Voorbeeld

Los exact op.

**a** $10x^{-\frac{1}{3}} = 5$

**b** $\sqrt[3]{(2x)^2} = 5$

*Uitwerking*

**a**
$$10x^{-\frac{1}{3}} = 5$$
$$x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$
$$x = (\tfrac{1}{2})^{-3}$$
$$x = (2^{-1})^{-3}$$
$$x = 2^3 = 8$$

**b**
$$\sqrt[3]{(2x)^2} = 5$$
$$(2x)^{\frac{2}{3}} = 5$$
$$2x = 5^{\frac{3}{2}}$$
$$2x = 5\sqrt{5}$$
$$x = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

**13** Los exact op.

**a** $x^{\frac{2}{3}} = 9$

**b** $8x^{-1\frac{1}{2}} = 1$

**c** $5 - 2x^{-3} = 4$

**d** $\sqrt{(2x)^3} = \frac{1}{8}$

INFORMATIEF

## Gebroken exponenten en hogeremachtswortels

De regel $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ passen we uitsluitend toe bij positieve grondtallen.

Bij negatieve grondtallen moet erbij dat de breuk $\frac{p}{q}$ niet vereenvoudigd kan worden.

Dus $(-2)^{1,4} = (-2)^{\frac{14}{10}} = (-2)^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^7} = \sqrt[5]{-128} \approx -2{,}639$

$(-2)^{1,5} = (-2)^{\frac{15}{10}} = (-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-2)^3} = \sqrt{-8}$ bestaat niet

$(-2)^{1,6} = (-2)^{\frac{16}{10}} = (-2)^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^8} = \sqrt[5]{256} \approx 3{,}031$

Laat je de voorwaarde dat de breuk $\frac{p}{q}$ niet vereenvoudigd kan worden weg,

dan krijg je $(-2)^{1,4} = (-2)^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{(-2)^{14}} = \sqrt[10]{16\,384} \approx 2{,}639$ en dit klopt niet

$(-2)^{1,5} = (-2)^{\frac{15}{10}} = (-2)^{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^6} = \sqrt[4]{64} \approx 2{,}828$ en dit klopt niet.

In de opgaven mag je uitgaan van positieve grondtallen.

**A14** Los exact op.

**a** $\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^{1\frac{1}{2}}$

**b** $3 \cdot \sqrt[4]{(2x)^{-1}} = 6$

**c** $(x + 9)^{-1\frac{1}{2}} = \frac{8}{27}$

**d** $\frac{1}{3}(x^2 - 3)^{2\frac{1}{2}} = 81$

**A15** Los exact op $(x^2 + 10)^{1\frac{1}{2}} = 3x^2(x^2 + 10)^{\frac{1}{2}}$.

**O16** De formule $y = 27x^3$ is te schrijven in de vorm $x = ay^b$. Onderzoek hoe dat gaat.

## Theorie D Variabele vrijmaken bij $y = ax^p$

Het is mogelijk om bij $y = ax^p$ de variabele $x$ vrij te maken zodat $x$ is uitgedrukt in $y$, oftewel $x$ als functie van $y$ is geschreven.

Bij $y = 21x \cdot \sqrt[3]{x}$ krijg je $y = 21x \cdot \sqrt[3]{x}$ — Verwissel beide leden zodat $x$ in het linkerlid komt.

$$21x \cdot \sqrt[3]{x} = y$$
$$x^{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{21}y$$
$$x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{21}y$$
$$x = (\tfrac{1}{21}y)^{\frac{3}{4}}$$
$$x = (\tfrac{1}{21})^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$$
$$x \approx 0{,}10y^{0,75}$$

Dus $x = 0{,}10y^{0,75}$.

### Voorbeeld

Schrijf de formule $y = \dfrac{10}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$ in de vorm $x = ay^b$.

Rond zo nodig af op twee decimalen.

*Uitwerking*

$$y = \frac{10}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{10}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{10}{x^{2\frac{1}{2}}} = 10x^{-2\frac{1}{2}} = 10x^{-\frac{5}{2}}$$

$y = 10x^{-\frac{5}{2}}$ geeft $10x^{-\frac{5}{2}} = y$

$$x^{-\frac{5}{2}} = 0{,}1y$$

$$x = (0{,}1y)^{-\frac{2}{5}}$$

$$x = 0{,}1^{-\frac{2}{5}} \cdot y^{-\frac{2}{5}}$$

$$x \approx 2{,}51y^{-0{,}4}$$

Dus $x = 2{,}51y^{-0{,}4}$.

**17** Schrijf in de vorm $x = ay^b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

**a** $y = 5x^{1\frac{1}{2}}$ **b** $y = 0{,}1x^{-1\frac{2}{3}}$ **c** $y = 125x^{-2\frac{1}{2}}$

**18** Maak $x$ vrij. Rond zo nodig af op twee decimalen.

**a** $y = 15x \cdot \sqrt[3]{x}$ **b** $y = \dfrac{12}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$ **c** $y = \dfrac{6}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}}$

**A19**
**a** Schrijf de formule $K = 15q^{-1{,}6}$ in de vorm $q = aK^b$. Rond $a$ af op twee decimalen.
**b** Druk $t$ uit in $v$ bij $v = 25t\sqrt{t}$. Rond af op twee decimalen.

**A20** Maak $m$ vrij bij de formule $F = \dfrac{m\sqrt{m}}{m\sqrt{m} - 1}$.

**A21**

Bij een tsunami hangt de golfhoogte af van de waterdiepte. Hoe minder diep het water is, hoe hoger de golf. Dus bij de kust krijg je met hoge golven te maken. Men heeft het verband $h = h_0 \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^{0,25}$ gevonden.

Hierin zijn $d_0$ en $h_0$ de waterdiepte en golfhoogte op de plek waar de tsunami ontstaat en zijn $d$ en $h$ de waterdiepte en golfhoogte op een andere plek, met $d$, $h$, $d_0$ en $h_0$ in meter.
Op 24 december 2004 ontstond er een tsunami met een golfhoogte van 60 cm in een gebied met waterdiepte 1 km.
Met bovenstaande gegevens is voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte $d$ en de golfhoogte $h$ te beschrijven met de formule $h = 3,37d^{-0,25}$.

**a** Toon dit aan.
**b** Bereken in dm nauwkeurig de golfhoogte bij een waterdiepte van 300 meter.
**c** Maak $d$ vrij bij $h = 3,37d^{-0,25}$. Rond af op gehelen.
**d** Bij welke waterdieptes is de golf meer dan 2 meter hoog?

**A22**

Tussen de luchtdruk $D$ in mbar en de hoogte $h$ in km boven zeeniveau geldt bij benadering de formule $D = 1014(1 - 0,0226h)^{5,26}$.

**a** Bereken in mbar nauwkeurig de luchtdruk op een hoogte van 1,5 km.
**b** Maak $h$ vrij. Rond af op twee decimalen.
**c** Op welke hoogten is de luchtdruk minder dan 0,5 bar? Rond af op honderden meter.

# Terugblik

## Machten met negatieve en gebroken exponenten

De rekenregels voor machten gelden ook voor machten met negatieve exponenten.

Dus $a^3 \cdot a^{-5} = a^{-2}$, $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$, $(a^{-2})^3 = a^{-6}$ en $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$.

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

De regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ gebruik je om bijvoorbeeld $\frac{5}{6}a^{-3}b^2$ zonder negatieve exponenten te schrijven. Je krijgt $\frac{5}{6}a^{-3}b^2 = \frac{5b^2}{6a^3}$.

De rekenregels voor machten met gebroken exponenten zijn $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Dus $2x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$ en $(4x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(4x)^2} = \sqrt[3]{16x^2}$.

Met de regels $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ kun je $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten schrijven. Je krijgt $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}} = \frac{2a^{\frac{1}{4}}}{3b^{\frac{4}{5}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{a}}{3 \cdot \sqrt[5]{b^4}}$.

$\frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ is als macht van $x$ te schrijven: $\frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^2}{x^{3\frac{1}{4}}} = x^{2-3\frac{1}{4}} = x^{-1\frac{1}{4}}$.

## Vergelijkingen met gebroken exponenten

Bij het exact oplossen van vergelijkingen als $6x^{-1\frac{1}{2}} + 5 = 53$ gebruik je de regel: voor $c > 0$ en $x > 0$ geldt $x^{\frac{a}{b}} = c$ geeft $x = c^{\frac{b}{a}}$.

$6x^{-1\frac{1}{2}} + 5 = 53$

$6x^{-1\frac{1}{2}} = 48$

$x^{-\frac{3}{2}} = 8$

$x = 8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

## Variabelen vrijmaken bij formules van de vorm $y = ax^p$

Om bij de formule $y = \frac{50 \cdot \sqrt[4]{x}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$ de variabele $x$ vrij te maken, herleid je de formule eerst tot de vorm $y = ax^p$.

$y = \frac{50 \cdot \sqrt[4]{x}}{2x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{50x^{\frac{1}{4}}}{2x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{50x^{\frac{1}{4}}}{2x^{2\frac{1}{3}}} = 25x^{-2\frac{1}{12}}$

Hoe je bij de formule $y = 25x^{-2\frac{1}{12}}$ vervolgens $x$ kunt vrijmaken, oftewel $x$ uitdrukken in $y$, oftewel $x$ schrijven als functie van $y$, zie je hiernaast.

$y = 25x^{-2\frac{1}{12}}$

$25x^{-2\frac{1}{12}} = y$

$x^{-\frac{25}{12}} = 0{,}04y$

$x = (0{,}04y)^{-\frac{12}{25}}$

$x = 0{,}04^{-\frac{12}{25}} \cdot y^{-\frac{12}{25}}$

$x \approx 4{,}69y^{-0{,}48}$

# 5.2 Machtsfuncties en wortelfuncties

**023**

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^6$ en $k(x) = x^9$.

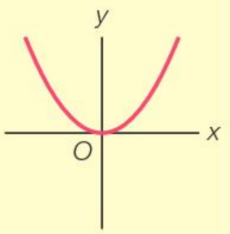
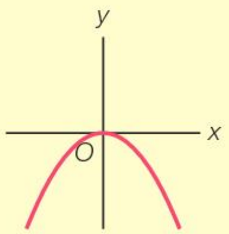
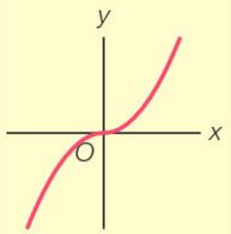
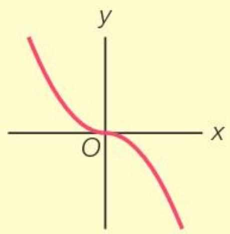
**a** Plot de grafieken van deze functies. Neem $x$ tussen $-1{,}5$ en $1{,}5$ en $y$ tussen $-2$ en $2$.

**b** Er zijn twee punten die op elk van de grafieken liggen. Schrijf de coördinaten van die punten op.

**c** Van welke van de grafieken ligt geen enkel punt onder de $x$-as?

## Theorie A De grafiek van een machtsfunctie

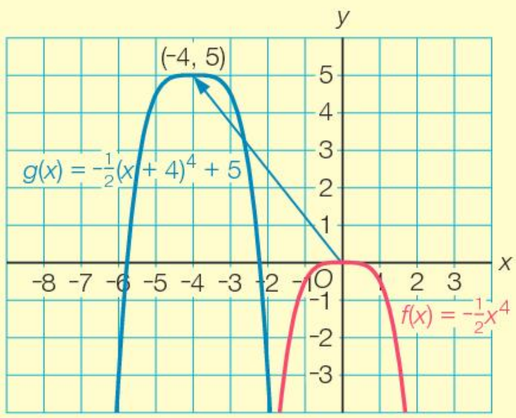
Een functie van de vorm $f(x) = ax^n$ is een **machtsfunctie**.
In het schema hieronder zie je hoe de grafiek van $f$ eruitziet voor $n > 1$ en $n$ een geheel getal.

| *n* even | | *n* oneven | |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ | $a < 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
|  |  |  |  |

De functies $f(x) = ax^n$ zijn **standaardfuncties** en de bijbehorende grafieken zijn **standaardgrafieken**. Je mag standaardgrafieken zonder toelichting tekenen en schetsen.
Bij even waarden van $n$ is de grafiek (lijn)symmetrisch met de $y$-as als symmetrieas. Bij oneven waarden van $n$ is de grafiek puntsymmetrisch met de oorsprong als **punt van symmetrie**.

Een grafiek kun je verschuiven. Zo ontstaat een **beeldgrafiek**.
Een ander woord voor verschuiving is **translatie**.

De grafiek van $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^4 + 5$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^4$ bij de translatie 4 naar links en 5 omhoog. Deze translatie noteren we als translatie $(-4, 5)$. Zie de figuur hiernaast.
De top van de grafiek van $g$ is $(-4, 5)$,
het maximum van $g$ is $g(-4) = 5$
en het bereik is $B_g = \langle \leftarrow, 5]$.



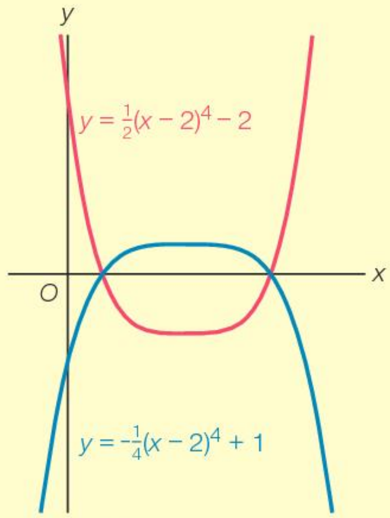

**figuur 5.1**

Algemeen geldt: bij de translatie $(p, q)$ vervang je in de formule $x$ door $x - p$ en tel je $q$ bij de functiewaarde op.
Pas je op de grafiek van $y = 3(x + 7)^5 - 2$ de translatie (8, 6) toe, dan krijg je $y = 3(x + 7)^5 - 2 \xrightarrow{\text{translatie } (8,\, 6)} y = 3(x - 8 + 7)^5 - 2 + 6$, dus $y = 3(x - 1)^5 + 4$.

**grafiek** **beeldgrafiek**
$y = ax^n \xrightarrow{\text{translatie } (p,\, q)} y = a(x - p)^n + q$

Behalve verschuiven kun je een grafiek ook vermenigvuldigen.
Bij de **vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as** met $-\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}(x - 2)^4 - 2$ als beeld de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(x - 2)^4 - 2)$, dus van $y = -\frac{1}{4}(x - 2)^4 + 1$. Zie de figuur hiernaast.



**figuur 5.2**

**grafiek** **beeldgrafiek**
$y = x^n \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a} y = ax^n$

Translaties en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van **transformaties**. De volgorde waarin je transformaties toepast, is van belang.

$y = x^3 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (2,\, 5)} y = 4(x - 2)^3 + 5$

$y = x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (2,\, 5)} y = (x - 2)^3 + 5 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4((x - 2)^3 + 5)$
$y = 4(x - 2)^3 + 20$

### Voorbeeld

Op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^6$ wordt eerst de translatie (2, −3) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met −2 ten opzichte van de $x$-as.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en geef de coördinaten van de top.

*Uitwerking*

$y = \frac{1}{4}x^6$
↓ translatie (2, −3)
$y = \frac{1}{4}(x - 2)^6 - 3$
↓ verm. $x$-as, −2
$y = -2(\frac{1}{4}(x - 2)^6 - 3)$
oftewel $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^6 + 6$
De top is (2, 6).

Bij de translatie (2, −3) vervang je in de formule $x$ door $x - 2$ en trek je 3 af van de functiewaarde.

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met −2 vermenigvuldig je de functiewaarde met −2.

**24** Op de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^3$ wordt eerst de translatie $(-3, -5)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met $-3$ ten opzichte van de $x$-as.

**a** Stel de formule op van de beeldgrafiek.

**b** Geef de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

**25** **a** Op de grafiek van $y = 0{,}3x^4$ wordt eerst de translatie $(-5, 6)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met $-4$ ten opzichte van de $x$-as. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

**b** Op de grafiek van $y = 0{,}3x^4$ wordt eerst de vermenigvuldiging met $-4$ ten opzichte van de $x$-as toegepast en vervolgens de translatie $(-5, 6)$. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

**26** Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld hierin de coördinaten van de top of van het punt van symmetrie.

**a** $y = \frac{1}{2}(x+2)^4 - 3$

**b** $y = -\frac{1}{3}(x-2)^3$

**c** $y = 12 - (x+3)^5$

**d** $y = 3(x^4 - 2) + 5$

**A27** **a** Op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^5 + 7$ wordt eerst de translatie $(1, 2)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met $-1$ ten opzichte van de $x$-as.
Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

**b** De grafiek van $g(x) = -2\frac{1}{2}(x+4)^6 - 1$ wordt eerst vermenigvuldigd met $-4$ ten opzichte van de $x$-as, vervolgens wordt de translatie $(-5, -4)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie $h$.
Bereken de extreme waarde van $h$.

**A28** Gegeven zijn de functies $f(x) = (x-5)^3 + 5$ en $g(x) = \sqrt[3]{x-5} + 5$.

**a** Bewijs dat $g$ de inverse is van $f$.

**b** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$.

**O29** **a** Plot de grafiek van $y = \sqrt{x}$.
Geef het domein en het bereik.

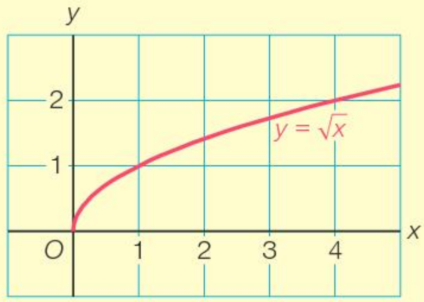
**b** Plot de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$.
Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$ uit die van $y = \sqrt{x}$?

## Theorie B Domein en bereik van wortelfuncties

De eenvoudigste **wortelfunctie** is $f(x) = \sqrt{x}$.
De grafiek van $f$ is een standaardgrafiek en is in figuur 5.3 getekend. Hierbij is de volgende tabel gebruikt.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | 0 | 1 | 1,4 | 2 | 2,4 |

De grafiek is een halve parabool die de $y$-as in het **randpunt** $O(0, 0)$ raakt.
Het domein van $f$ is $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en het bereik van $f$ is $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.



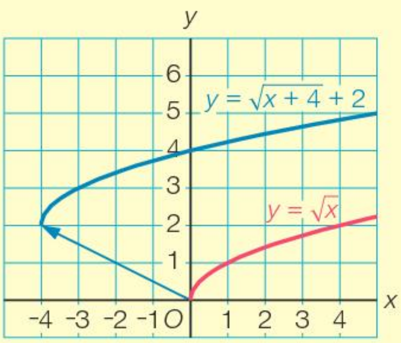

**figuur 5.3** De grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een standaardgrafiek.

Uitgaande van de standaardgrafiek $y = \sqrt{x}$ zijn door transformaties grafieken van andere wortelfuncties te tekenen. Hieronder zie je het effect van transformaties op randpunt, domein en bereik.

$y = \sqrt{x}$

$\downarrow$ translatie (−4, 2)

$y = \sqrt{x+4} + 2$




Van $y = \sqrt{x+4} + 2$ is het randpunt (−4, 2), het domein $[-4, \rightarrow\rangle$ en het bereik $[2, \rightarrow\rangle$.

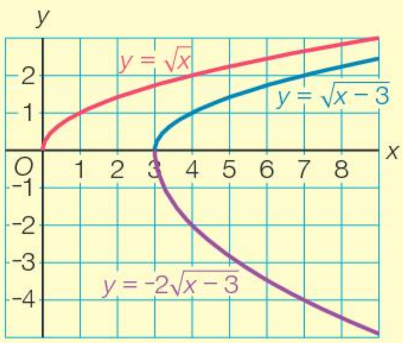
$y = \sqrt{x}$

$\downarrow$ translatie (3, 0)

$y = \sqrt{x-3}$

$\downarrow$ verm. $x$-as, −2

$y = -2\sqrt{x-3}$




Van $y = -2\sqrt{x-3}$ is het randpunt (3, 0), het domein $[3, \rightarrow\rangle$ en het bereik $\langle\leftarrow, 0]$.

**30** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$ en $g(x) = -2\sqrt{x+3}$.

**a** Hoe ontstaan de grafieken van $f$ en $g$ uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?

**b** Schets de grafieken van $f$ en $g$.

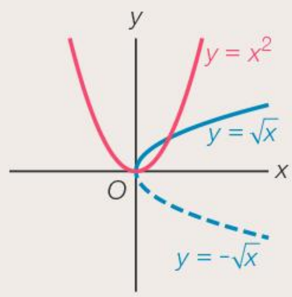
**c** Geef $D_f$, $B_f$, $D_g$ en $B_g$.

Vermeld in de schets de coördinaten van het randpunt.

INFORMATIEF

## Het verband tussen de grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$

Je weet dat de grafiek van $y = x^2$ een parabool is die de $x$-as raakt in de oorsprong. Verwissel je $x$ en $y$ dan krijg je de parabool $x = y^2$ die de $y$-as raakt in de oorsprong.
Uit $x = y^2$ volgt $y^2 = x$ en dit geeft $y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}$.
Dus de grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een halve parabool die de $y$-as raakt in de oorsprong.




**31** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ en $g(x) = -\sqrt{x + 5}$.

**a** Hoe ontstaan de grafieken van $f$ en $g$ uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?

**b** Schets de grafieken van $f$ en $g$.

**c** Geef $D_f$, $B_f$, $D_g$ en $B_g$.

**A32** Geef van elk van de volgende functies de coördinaten van het randpunt van de grafiek. Geef ook het domein en het bereik.

**a** $f(x) = \sqrt{x + 5} + 3$

**b** $g(x) = \sqrt{x + 3} - 7$

**c** $h(x) = -2\sqrt{x + 1}$

**d** $k(x) = 3\sqrt{x} + 1$

**e** $l(x) = -\sqrt{x - 1} - 1$

**f** $m(x) = -3 + \sqrt{x}$

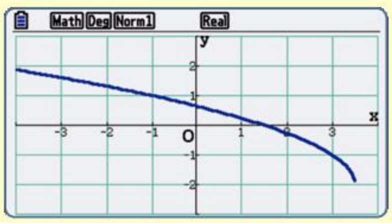
**O33** Gegeven is de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x - 6}$.

**a** Het domein is $D_f = [3, \rightarrow\rangle$.
Licht dit toe.

**b** Het bereik is $B_f = \langle\leftarrow, 5]$.
Licht dit toe.

## Theorie C De grafiek van een wortelfunctie

De grafiek van $f(x) = -2 + \sqrt{7 - 2x}$ is een halve parabool. Het is niet eenvoudig om door middel van transformaties de grafiek van $f$ te krijgen uit die van $y = \sqrt{x}$. Het is daarom noodzakelijk bij een wortelfunctie de coördinaten van het randpunt exact te berekenen. Je berekent daartoe het domein en hieruit volgen de coördinaten van het randpunt.




**figuur 5.4**

Bij $f(x) = -2 + \sqrt{7 - 2x}$ vind je het domein als volgt.
Onder het wortelteken moet een niet-negatief getal staan, dus
$7 - 2x \geq 0$
$-2x \geq -7$
$x \leq 3\frac{1}{2}$
Dus $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2}]$ en het randpunt is $(3\frac{1}{2}, -2)$.

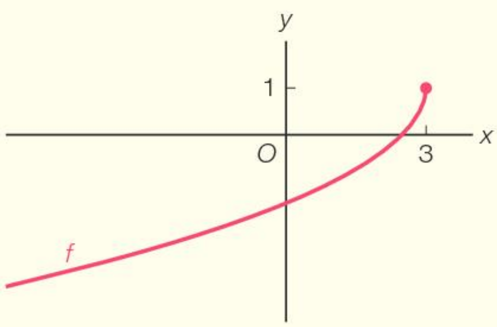
$f(3\frac{1}{2}) = -2 + \sqrt{0} = -2$

**Afspraak**
Bij het schetsen van de grafiek van een wortelfunctie bereken je eerst het domein en vermeld je de coördinaten van het randpunt.

**Voorbeeld**
Gegeven is de functie $f(x) = 1 - \sqrt{6 - 2x}$.
**a** Schets de grafiek van $f$ en geef $B_f$.
**b** Los algebraïsch op $f(x) > -2$.
**c** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -5$?

Gebruik de GR voor het schetsen van de grafiek.

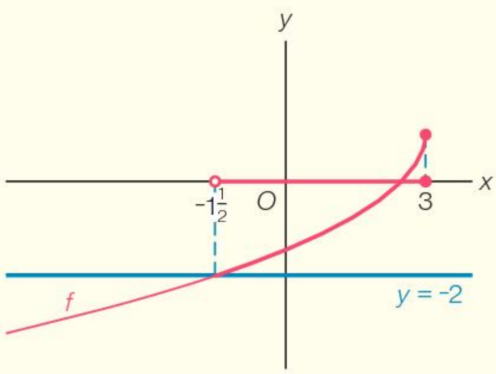
*Uitwerking*
**a** $6 - 2x \geq 0$
$-2x \geq -6$
$x \leq 3$
$D_f = \langle \leftarrow, 3]$ en het randpunt is $(3, 1)$.
$B_f = \langle \leftarrow, 1]$




**b** $f(x) = -2$ geeft $1 - \sqrt{6 - 2x} = -2$
$\sqrt{6 - 2x} = 3$
kwadrateren geeft
$6 - 2x = 9$
$-2x = 3$
$x = -1\frac{1}{2}$

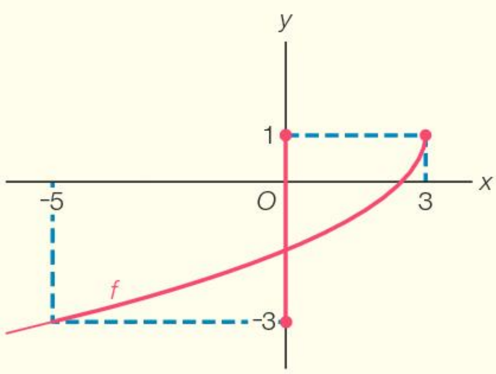
$f(x) > -2$ geeft $-1\frac{1}{2} < x \leq 3$

Houd rekening met het domein.




**c** $f(-5) = -3$
$x \geq -5$ geeft $-3 \leq f(x) \leq 1$

Houd rekening met het bereik.



**34** Geef van elk van de volgende functies het domein, het bereik en de coördinaten van het randpunt van de grafiek.

**a** $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$

**b** $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$

**c** $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

**d** $k(x) = -2\sqrt{x} + 3$

**35** Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$.

**a** Schets de grafiek van $f$ en geef $B_f$.

**b** Los algebraïsch op $f(x) > -2$.

**c** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x < 22$?

**A36** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{7 - 3x} - 4$.

**a** Schets de grafiek van $f$ en geef $B_f$.

**b** Los algebraïsch op $f(x) > -2$.

**c** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -3$?

**A37** Los algebraïsch op $2 + \sqrt{7 - 2x} < x$.

**38** Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{2x + 16}$.
De functie $g$ is de inverse van de functie $f$.
Bereken het domein en het bereik van $g$.

**39** Het randpunt van de grafiek van $f(x) = 4 - \sqrt{5 + ax}$ ligt op de lijn $k$: $y = 2x - 1$.
Bereken $a$.

**A40** De grafiek van de functie $f(x) = a\sqrt{x + b}$ gaat door de punten (5, 3) en (13, 9).
Bereken algebraïsch $a$ en $b$.

**O41**

**a** Toon aan dat uit $y = 2\sqrt{x}$ volgt $x = \frac{1}{4}y^2$.

**b** Vul in: Uit $y = \sqrt{x - 2}$ volgt $x = \ldots$

**c** Vul in: Uit $y = 2\sqrt{x - 2}$ volgt $x = \ldots$

## Theorie D Variabelen vrijmaken bij wortelformules

Bij de formule $y = 2 + \sqrt{x - 3}$ kun je de variabele $x$ vrijmaken.
Dit gaat als volgt.

$y = 2 + \sqrt{x - 3}$ Verwissel beide leden zodat $x$ in het linkerlid komt.
$2 + \sqrt{x - 3} = y$ Isoleer de wortelvorm.
$\sqrt{x - 3} = y - 2$
kwadrateren geeft
$x - 3 = (y - 2)^2$
$x - 3 = y^2 - 4y + 4$
$x = y^2 - 4y + 7$

**Afspraak**
Bij het vrijmaken van variabelen hoef je geen voorwaarden te vermelden.

**Voorbeeld**
Maak $t$ vrij bij de formule $N = 3 - 2\sqrt{t - 1}$.

*Uitwerking*
$N = 3 - 2\sqrt{t - 1}$
$2\sqrt{t - 1} = 3 - N$
kwadrateren geeft
$4(t - 1) = (3 - N)^2$
$4t - 4 = 9 - 6N + N^2$
$4t = 13 - 6N + N^2$
$t = \frac{1}{4}N^2 - 1\frac{1}{2}N + 3\frac{1}{4}$

**42**
**a** Gegeven is de formule $F = 3\sqrt{2t - 1}$.
Maak $t$ vrij.
**b** Gegeven is de formule $A = 5 + \sqrt{4 - 3B}$.
Schrijf $B$ als functie van $A$.
**c** Druk $y$ uit in $x$ bij $2x\sqrt{y} - 5 = 0$.
**d** Gegeven is $R\sqrt{q} - \sqrt{R} = 6$.
Schrijf $q$ als functie van $R$.

INFORMATIEF

### Variabelen vrijmaken bij wortelformules

De functie $f(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$ heeft $D_f = [3, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [2, \rightarrow\rangle$, dat wil zeggen $x \geq 3$ en $y \geq 2$. Deze voorwaarden blijven gelden bij het vrijmaken van $x$.
Maak je $x$ vrij bij $y = 2 + \sqrt{x - 3}$, dan krijg je $x = y^2 - 4y + 7$.
Dus ook bij $x = y^2 - 4y + 7$ is $x \geq 3$ en $y \geq 2$. Dat betekent dat je bij $x = y^2 - 4y + 7$ bijvoorbeeld niet $y = 0$ mag nemen. De voorwaarde $y \geq 2$ mag je achterwege laten.

**A43** De snelheid van het geluid hangt af van de temperatuur. Bij windstil weer wordt dit verband bij benadering gegeven door $v = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$.
Hierin is $v$ de snelheid van het geluid in m/s bij een temperatuur van $T$ °C.
Ga in deze opgave uit van windstil weer.

**a** In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van −27,4 °C tot en met 38,6 °C.
Bereken in m/s het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen. Rond af op gehelen.

**b** Bereken algebraïsch de temperatuur in gehele graden Celsius in het geval de geluidssnelheid 340 m/s is.

In de atmosfeer neemt de temperatuur af volgens de formule $T = T_0 - 6{,}5h$. Hierin is $h$ de hoogte in km en $T_0$ de temperatuur in °C op 0 km hoogte.

**c** Bereken de geluidssnelheid in km/uur op een hoogte van 2,5 km in het geval de temperatuur 25 °C is op 0 km hoogte. Rond af op gehelen.

**d** Schrijf $v$ in de vorm $v = a\sqrt{bh + c}$ in het geval het op 2 km hoogte −1 °C is. Rond zo nodig af op vier decimalen.

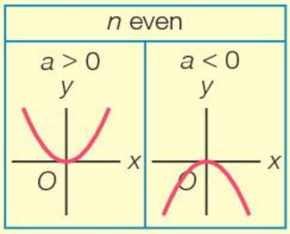
**e** Stel een formule op van $h$ in de vorm $h = pv^2 + qT_0 + r$. Rond $p$ en $q$ af op vier decimalen.

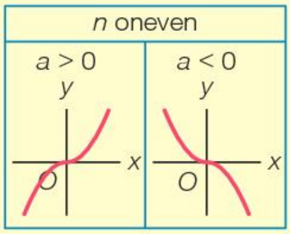
**E44** Gegeven is de functie $f(x) = a + \sqrt{bx + c}$. Verder is gegeven de functie $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ met $x \geq 3$.
Bereken algebraïsch voor welke $a$, $b$ en $c$ geldt $g = f^{\text{inv}}$.

# Terugblik

## De grafiek van een machtsfunctie.

Een functie van de vorm $f(x) = ax^n$ is een machtsfunctie.
De bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken die je zonder toelichting mag tekenen en schetsen. Hiernaast zie je hoe de grafiek van $f$ eruitziet voor $n > 1$ en $n$ een geheel getal.
Bij even waarden van $n$ is de grafiek (lijn)symmetrisch met de $y$-as als symmetrieas. Bij oneven waarden van $n$ is de grafiek puntsymmetrisch met de oorsprong als punt van symmetrie.




## Transformaties

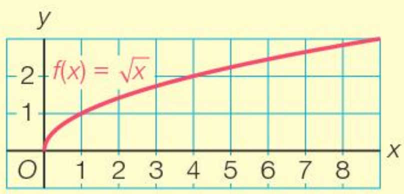
Translaties en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van transformaties. Hieronder zie je dat de volgorde waarin je transformaties toepast van belang is.

$y = 4x^5$
↓ translatie (3, 2)
$y = 4(x - 3)^5 + 2$
↓ verm. $x$-as, $-\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2}(4(x - 3)^5 + 2)$
oftewel $y = -2(x - 3)^5 - 1$

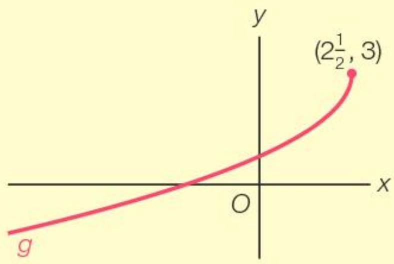
$y = 4x^5$
↓ verm. $x$-as, $-\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{2} \cdot 4x^5 = -2x^5$
↓ translatie (3, 2)
$y = -2(x - 3)^5 + 2$

## De grafiek van een wortelfunctie

De eenvoudigste wortelfunctie is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$. De grafiek is een halve parabool die de $y$-as in het randpunt (0, 0) raakt. Het domein is $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.




Om de grafiek van $g(x) = 3 - \sqrt{5 - 2x}$ te schetsen, bereken je eerst het domein en de coördinaten van het randpunt. Uit $5 - 2x \geq 0$ volgt $-2x \geq -5$, dus $x \leq 2\frac{1}{2}$.
Dus $D_g = \langle\leftarrow, 2\frac{1}{2}]$ en het randpunt is $(2\frac{1}{2}, 3)$.




## Variabele vrijmaken bij wortelformule

Bij de formule $L = 4 + \sqrt{3p + 1}$ kun je $p$ vrijmaken.
$L = 4 + \sqrt{3p + 1}$
$\sqrt{3p + 1} = L - 4$
kwadrateren geeft
$3p + 1 = L^2 - 8L + 16$
$3p = L^2 - 8L + 15$
$p = \frac{1}{3}L^2 - 2\frac{2}{3}L + 5$

# 5.3 Exponentiële functies

**045** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

**a** Plot de grafieken van $f$ en $g$. Welk verband bestaat er tussen de twee grafieken?

**b** Bereken $f(-10)$, $f(-20)$ en $f(-100)$.

**c** Is er bij $f$ een origineel te vinden waarvan het beeld 0 is? Licht toe.

**d** Geef van $f$ en van $g$ het bereik.

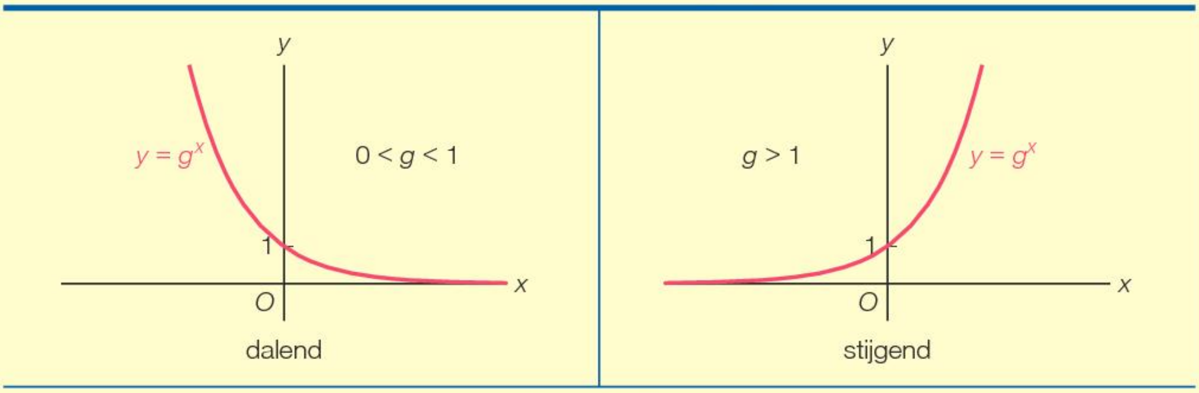
## Theorie A De standaardfunctie $f(x) = g^x$

De functie $f(x) = 2^x$ is een **exponentiële functie**. De grafiek is stijgend. Neem je $x$ heel klein, bijvoorbeeld $-1000$, dan ligt het bijbehorende punt van de grafiek heel dicht bij de $x$-as. De $x$-as is de **horizontale asymptoot** van de grafiek van $f$. Het bereik is $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$. Het domein bestaat uit alle reële getallen, dus $D_f = \mathbb{R}$.

**Een asymptoot is een lijn waarmee de grafiek op den duur vrijwel samenvalt.**

De grafiek van $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ is dalend en komt aan de rechterkant steeds dichter bij de $x$-as. Ook deze grafiek heeft dus de $x$-as als horizontale asymptoot.
De functies $f(x) = g^x$ met $g > 0$ en $g \neq 1$ zijn **exponentiële standaardfuncties**. De bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken, dus je mag ze zonder toelichting tekenen en schetsen.

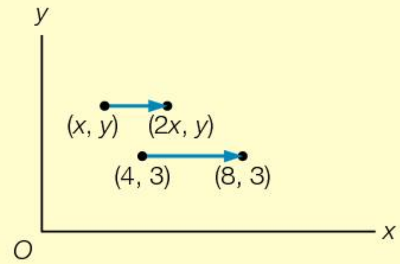
**De standaardgrafiek $y = g^x$**




domein $\mathbb{R}$
bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$
de $x$-as (de lijn $y = 0$) is horizontale asymptoot

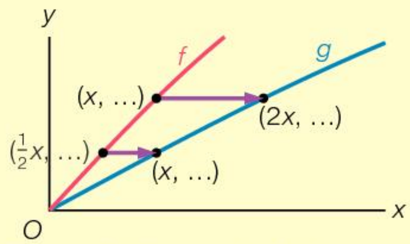
Op de standaardgrafiek $y = g^x$ kun je transformaties uitvoeren. Hierbij krijg je ook te maken met de **vermenigvuldiging ten opzichte van de *y*-as**.

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met 2 heeft het punt (4, 3) als beeld het punt (8, 3). En zo heeft het punt $(x, y)$ als beeld het punt $(2x, y)$.




**figuur 5.5** Vermenigvuldigen ten opzichte van de $y$-as met 2.

Vermenigvuldig je de grafiek van $y = f(x)$ ten opzichte van de $y$-as met 2, dan geldt voor de beeldgrafiek $y = g(x)$ dat $g(2x) = f(x)$ oftewel $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$. En vermenigvuldig je de grafiek van $y = f(x)$ ten opzichte van de $y$-as met $b$, dan geldt voor de beeldgrafiek $y = g(x)$ dat $g(bx) = f(x)$ oftewel $g(x) = f(\frac{1}{b} \cdot x)$. Dus bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met $b$ vervang je in de formule $x$ door $\frac{1}{b} \cdot x$.




**figuur 5.6** Vermenigvuldigen ten opzichte van de $y$-as met 2.

**Het effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = g^x$**

**grafiek** **beeldgrafiek**

$y = g^x \xrightarrow{\text{translatie } (0,\, q)} y = g^x + q$ **met asymptoot** $y = q$

$y = g^x \xrightarrow{\text{translatie } (p,\, 0)} y = g^{x-p}$ **met asymptoot** $y = 0$

$y = g^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a} y = a \cdot g^x$ **met asymptoot** $y = 0$

$y = g^x \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } b} y = g^{\frac{1}{b} \cdot x}$ **met asymptoot** $y = 0$

Je kunt bij de functie $f(x) = 2 \cdot 3^{0{,}75x}$ aangeven hoe de grafiek uit de standaardgrafiek $y = 3^x$ ontstaat. Hierbij krijg je te maken met de vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met $\dfrac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$.

$y = 3^x$
$\downarrow$ verm. $x$-as, 2
$y = 2 \cdot 3^x$
$\downarrow$ verm. $y$-as, $\frac{4}{3}$
$y = 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}x}$ oftewel $y = 2 \cdot 3^{0{,}75x}$

De grafiek van $y = g^x + q$ heeft als asymptoot de lijn $y = q$.
Bij het schetsen of tekenen van zo'n grafiek teken je deze asymptoot als stippellijn en zet je de formule erbij.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 150 - 3 \cdot 0{,}7^x$.
Geef het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.

*Aanpak*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $y = 0{,}7^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as}, -3}$ | $y = -3 \cdot 0{,}7^x \xrightarrow{\text{translatie } (0,150)}$ | $y = 150 - 3 \cdot 0{,}7^x$ |
| asymptoot | $y = 0$ | $y = 0$ | $y = 150$ |
| bereik | $\langle 0, \rightarrow\rangle$ | $\langle \leftarrow, 0\rangle$ | $\langle \leftarrow, 150\rangle$ |

*Uitwerking*

Het bereik is $\langle \leftarrow, 150\rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 150$.

**46** Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Vermeld ook de formule van de asymptoot.

**a** $f(x) = 3^{x+2} - 1$
**b** $g(x) = 2 \cdot 0{,}5^x + 3$
**c** $h(x) = 3 \cdot 2^{3x} + 4$
**d** $k(x) = 10 - 0{,}8^{0{,}4x+1}$

**47** Geef het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.

**a** $f(x) = 8 \cdot 1{,}5^x - 6$
**b** $g(x) = 5 - 2 \cdot 0{,}8^x$
**c** $h(x) = 1000 - 0{,}3^{x-1}$
**d** $k(x) = 1000(1 - 0{,}3^x)$

**A48** De volgende transformaties worden toegepast op de standaardgrafiek $y = 3^x$. Geef telkens de formule van de beeldgrafiek.

**a** Eerst spiegelen in de $x$-as, dan 1 omlaag schuiven.
**b** Eerst de translatie (2, 5) en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met $\frac{1}{4}$.
**c** Eerst 5 omlaag en 4 naar rechts schuiven, dan met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de $x$-as.
**d** Eerst met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de $x$-as, dan de verschuiving 5 omlaag en 4 naar rechts.

**49** Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$.

**a** Hoe ontstaat de grafiek van $f$ uit een standaardgrafiek?
**b** Geef het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.
**c** Schets de grafiek van $f$. Denk eraan de asymptoot als stippellijn in de schets op te nemen.
**d** Bereken $f(3)$. Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 3$? Houd rekening met het bereik.
**e** Los op $f(x) \leq -1$. Rond af op twee decimalen.

**A50** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-1} + 2$.

**a** Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond af op twee decimalen.
**b** Voor welke $p$ heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

**A51** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x-3} - 1$.

**a** Voor welke $p$ heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = p$ geen oplossingen?

**b** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 2$?

**c** De lijn $x = 1$ snijdt de grafiek van $f$ in het punt $A$ en de grafiek van $g$ in het punt $B$.
Bereken de lengte van het lijnstuk $AB$.

**d** De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van $f$ in het punt $P$ en de grafiek van $g$ in het punt $Q$.
Bereken de lengte van het lijnstuk $PQ$. Rond af op drie decimalen.

**O52** $8 \cdot 4^x$ is te herleiden tot $2^{2x+3}$.

**a** Toon dit aan.

**b** Welke regels voor machten heb je bij vraag a gebruikt?

## Theorie B Herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$

Bij het herleiden van $8 \cdot 4^x$ tot $2^{2x+3}$ in opgave 52 heb je de regels $(a^p)^q = a^{pq}$ en $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ gebruikt.
Omgekeerd kun je $2^{2x+3}$ schrijven als $8 \cdot 4^x$. Je gebruikt dan de regels $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ van rechts naar links.
Zo krijg je $2^{2x+3} = 2^{2x} \cdot 2^3 = (2^2)^x \cdot 8 = 8 \cdot 4^x$.
Op dezelfde manier kun je een formule als $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ schrijven in de vorm $y = b \cdot g^x$. Zie het voorbeeld.

### Voorbeeld

Schrijf de formule $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

*Uitwerking*

$$y = 40 \cdot 3^{-2x+1} = 40 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^1 = 40 \cdot (3^{-2})^x \cdot 3 = 120 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 120 \cdot (\tfrac{1}{9})^x$$

Dus $y = 120 \cdot (\frac{1}{9})^x$.

**53** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

**a** $y = 15 \cdot 2^{3x+2}$

**b** $y = 50 \cdot 2^{3x-1}$

**c** $y = 260 \cdot 4^{1\frac{1}{2}x-1}$

**d** $y = 8 \cdot 4^{-2x-1}$

**54** 

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

**a** $y = 2^x \cdot 2^{2x-3}$

**b** $y = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2}$

**c** $y = 50\,000 \cdot 100^{-x-2\frac{1}{2}}$

**d** $y = \dfrac{3}{4^{2x-1}}$

**A55** 

De grafiek van $f(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}x+4}$ wordt 8 naar beneden en 12 naar rechts geschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie $h$. De functie $h$ kan geschreven worden in de vorm $h(x) = a + b \cdot g^x$.
Bereken exact $a$, $b$ en $g$.

**A56** 

Op de grafiek van $f(x) = 2^{x-3}$ wordt de translatie $(-5, 0)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g$.
Je kunt de grafiek van $g$ ook krijgen door de grafiek van $f$ met $a$ te vermenigvuldigen ten opzichte van de $x$-as.
Bereken $a$.

**O57** 

Schrijf $4\sqrt{2}$ als macht van 2 en los de vergelijking $2^{x-1} = 4\sqrt{2}$ exact op.

## Theorie C Exponentiële vergelijkingen

Bij het exact oplossen van **exponentiële vergelijkingen** zoals $2^{x-3} = \sqrt{2}$, $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ en $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$ werk je toe naar een vorm waarin het linker- en rechterlid als macht met hetzelfde grondtal zijn geschreven. Daarna gebruik je

$g^A = g^B$ geeft $A = B$

### Voorbeeld

Los exact op.

**a** $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ **b** $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$ **c** $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

*Uitwerking*

**a**
$$\begin{aligned} 3^{x+1} &= \tfrac{1}{9}\sqrt{3} \\ 3^{x+1} &= 3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ 3^{x+1} &= 3^{-1\frac{1}{2}} \\ x+1 &= -1\tfrac{1}{2} \\ x &= -2\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

**b**
$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{2x-1} &= 18 \\ 3^{2x-1} &= 9 \\ 3^{2x-1} &= 3^2 \\ 2x-1 &= 2 \\ 2x &= 3 \\ x &= 1\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

**c**
$$\begin{aligned} 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} &= 6 \\ 9^{\frac{1}{2}x-3} &= 3 \\ (3^2)^{\frac{1}{2}x-3} &= 3 \\ 3^{x-6} &= 3^1 \\ x-6 &= 1 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

**58** Los exact op.

**a** $2^{x+1} = 64$
**b** $2^{x-3} = \frac{1}{8}$
**c** $3^{2x} = 3$
**d** $(\frac{1}{2})^x = 1$
**e** $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
**f** $5^{x+6} = (\frac{1}{5})^x$

**59** Los exact op.

**a** $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$
**b** $10^{2x+1} = 0{,}01$
**c** $3^x - 2 = 25$
**d** $5 \cdot 2^x = 80$
**e** $10 \cdot 3^x = 270$
**f** $3 \cdot 8^{2-x} = 48$

**A60** Los exact op.

**a** $3 \cdot 2^x + 4 = 28$
**b** $5^{2x-6} = 0{,}04$
**c** $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$
**d** $32^{x-2} = \frac{1}{16}$
**e** $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$
**f** $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$

**A61** Op de grafiek van $f(x) = 3^{x+2} - 5$ wordt eerst de translatie (3, 7) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met $b$ ten opzichte van de $y$-as. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g$. Het punt $A(-15, 83)$ ligt op de grafiek van $g$.
Bereken $b$ exact.

**O62** Gegeven is de vergelijking $2^{x+1} + 2^x = 48$.

**a** Licht toe dat uit $2^{x+1} + 2^x = 48$ volgt $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$.
**b** Licht toe dat uit $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$ volgt $3 \cdot 2^x = 48$ en los deze vergelijking exact op.

## Theorie D Herleiden tot de vorm $g^A = g^B$

De vergelijking $3^{x+2} + 3^x = 10$ is exact op te lossen door de vergelijking te herleiden tot de vorm $g^A = g^B$. Je krijgt

$3^{x+2} + 3^x = 10$
$3^x \cdot 3^2 + 3^x = 10$
$9 \cdot 3^x + 3^x = 10$
$10 \cdot 3^x = 10$
$3^x = 1$
$3^x = 3^0$
$x = 0$

**63** Los exact op.

**a** $3^{x+2} + 3^x = 810$
**b** $2^{x-1} + 2^{x+1} = 10$
**c** $2^{x+3} - 2^x = \frac{7}{8}$
**d** $3^{x+2} = 24 + 3^x$
**e** $3^x - 3^{x-1} = 2\sqrt{3}$
**f** $5^{x-1} + 5^{x-2} = 6\sqrt{5}$

**A64** Bereken exact de oplossingen.

a $3^{x+1} = 9^{x+2}$

b $3^{x+1} - 3^{x-1} = 8\sqrt{3}$

c $3^{x^2} = (\frac{1}{3})^{x-6}$

d $5^{x^2+5} = 125^{x+1}$

e $2^{x+2} - (\frac{1}{2})^{-x+1} = 28$

f $4^{x^2+1} = 8^{x^2-1}$

**A65** Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$. Op de grafiek van $f$ wordt eerst de translatie (3, 8) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met 4 ten opzichte van de $x$-as. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$.

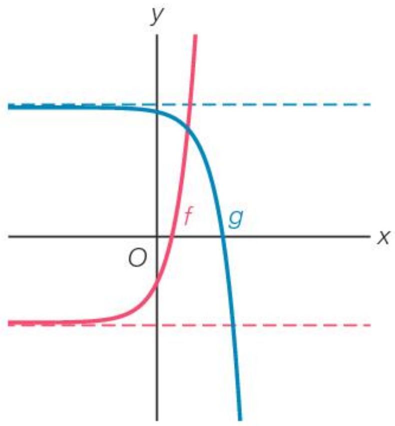
**A66** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{x+1} - 4$ en $g(x) = 6 - 3^{x-1}$.

a Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

b De lijn $x = 2\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van $f$ in het punt $A$ en de grafiek van $g$ in het punt $B$.
Bereken exact de lengte van het lijnstuk $AB$.

c Los exact op $f(x) - g(x) = 80$.

d Voor welke $p$ heeft de vergelijking $g(x) - f(x) = p$ geen oplossingen?

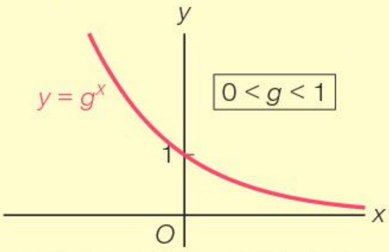



**figuur 5.7**

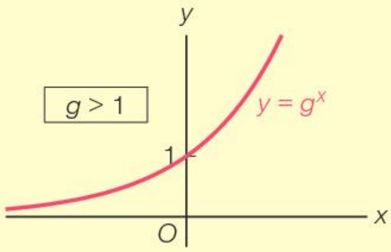
# Terugblik

### Standaardgrafieken $y = g^x$

Bij de exponentiële standaardfuncties $y = g^x$ onderscheiden we $0 < g < 1$ en $g > 1$.



grafiek is dalend als $0 < g < 1$



grafiek is stijgend als $g > 1$

In beide gevallen is het domein $\mathbb{R}$, het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en de $x$-as de horizontale asymptoot.

### Transformaties

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met factor $b$ vervang je in de formule $x$ door $\dfrac{1}{b} \cdot x$.

Je krijgt de grafiek van de functie $f(x) = 2^{\frac{1}{3}x - 5} + 4$ als volgt uit de standaardgrafiek $y = 2^x$.

$$y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (5,\ 4)} y = 2^{x-5} + 4 \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = 2^{\frac{1}{3}x - 5} + 4$$

Het bereik van $f$ is $\langle 4, \rightarrow \rangle$ en de horizontale asymptoot van de grafiek van $f$ is de lijn $y = 4$.

### Herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$

Bij het herleiden van de formule $y = 120 \cdot 3^{2x-1}$ tot de vorm $y = b \cdot g^x$ gebruik je de regels $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ van rechts naar links.
Je krijgt $y = 120 \cdot 3^{2x-1} = 120 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} = 120 \cdot (3^2)^x \cdot \frac{1}{3} = 40 \cdot 9^x$.

### Exponentiële vergelijkingen

Bij het exact oplossen van een vergelijking als $2 \cdot 3^{2x+4} = 54$ werk je toe naar de vorm $g^A = g^B$. Daarna gebruik je $g^A = g^B$ geeft $A = B$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{2x+4} &= 54 \\ 3^{2x+4} &= 27 \\ 3^{2x+4} &= 3^3 \\ 2x + 4 &= 3 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^x &= 4^{x-1} \\ 2^x &= (2^2)^{x-1} \\ 2^x &= 2^{2x-2} \\ x &= 2x - 2 \\ -x &= -2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^x &= 2^{x-2} + 12 \\ 2^x - 2^{x-2} &= 12 \\ 2^x - 2^x \cdot 2^{-2} &= 12 \\ 2^x - \tfrac{1}{4} \cdot 2^x &= 12 \\ \tfrac{3}{4} \cdot 2^x &= 12 \\ 2^x &= 16 \\ 2^x &= 2^4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

# 5.4 Logaritmen

**067**

Neem over en vul de exponent in.

**a** $2^{\cdots} = 8$ **c** $2^{\cdots} = \sqrt{2}$ **e** $3^{\cdots} = \frac{1}{27}$

**b** $2^{\cdots} = \frac{1}{4}$ **d** $3^{\cdots} = 9$ **f** $3^{\cdots} = \sqrt[5]{3}$

## Theorie A De logaritme

In opgave 67a moet je invullen tot welke macht je 2 moet verheffen om 8 te krijgen. Voor deze opdracht bestaat de notatie ${}^{2}\log(8)$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In ${}^{2}\log(8)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- ${}^{2}\log(8)$ spreek je uit als de tweede logaritme van acht of kortweg twee log acht.

${}^{2}\log(8)$ is een exponent. Het grondtal van de macht is 2 en de uitkomst is 8.
De exponent is 3, dus ${}^{2}\log(8) = 3$.
En zo is ${}^{3}\log(81)$ gelijk aan 4, want $3^4 = 81$.

${}^{3}\log(81)$ is de exponent van een macht met grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan 81.

**${}^{g}\log(x)$ is de exponent van een macht met grondtal $g$ waarmee de macht gelijk is aan $x$.**
**In ${}^{g}\log(x)$ heet $g$ het grondtal van de logaritme.**

Zoek je de uitkomst van ${}^{3}\log(\frac{1}{81})$, dan zoek je dus de exponent bij het grondtal 3 zodat je $\frac{1}{81}$ krijgt.
Daartoe bedenk je dat $\frac{1}{81} = 3^{-4}$, dus
${}^{3}\log(\frac{1}{81}) = {}^{3}\log(3^{-4}) = -4$.
En zo is ${}^{3}\log(9\sqrt{3}) = {}^{3}\log(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^{3}\log(3^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$.

${}^{g}\log(g^a) = a$

### Voorbeeld

Bereken.

**a** ${}^{2}\log(\frac{1}{8}\sqrt{2})$ **b** ${}^{5}\log(0{,}04)$

*Uitwerking*

**a** ${}^{2}\log(\frac{1}{8}\sqrt{2}) = {}^{2}\log(2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^{2}\log(2^{-2\frac{1}{2}}) = -2\frac{1}{2}$

**b** ${}^{5}\log(0{,}04) = {}^{5}\log(\frac{4}{100}) = {}^{5}\log(\frac{1}{25}) = {}^{5}\log(5^{-2}) = -2$

**68**

Bereken.

**a** ${}^{5}\log(125)$ **d** ${}^{7}\log(49)$ **g** ${}^{4}\log(0{,}25)$

**b** ${}^{10}\log(0{,}1)$ **e** ${}^{2}\log(\sqrt{2})$ **h** ${}^{4}\log(4)$

**c** ${}^{2}\log(4)$ **f** ${}^{2}\log(0{,}5)$ **i** ${}^{4}\log(1)$

**69** Bereken.

a $^{2}\log(64\sqrt{2})$
d $^{5}\log(\frac{1}{125})$
g $^{2}\log(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2})$
b $^{3}\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})$
e $^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{27})$
h $^{5}\log(1)$
c $^{3}\log(3^{21,5})$
f $^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{4})$
i $^{3}\log(81 \cdot \sqrt[5]{27})$

**O70** Licht toe.

a $^{3}\log(x) = 2$ geeft $x = 9$
b $^{5}\log(x) = -2$ geeft $x = \frac{1}{25}$

## Theorie B Logaritmische vergelijkingen

De **logaritmische vergelijking** $^{2}\log(x) = 5$ heeft als oplossing $x = 2^5$. Immers $^{2}\log(2^5) = 5$.
En zo krijg je bij de vergelijking $^{2}\log(x + 3) = 5$ dat $x + 3 = 2^5$, dus $x = 2^5 - 3 = 29$.

$^{2}\log(x) = 5$ geeft $x = 2^5$
$^{g}\log(x) = 5$ geeft $x = g^5$
$^{g}\log(x) = y$ geeft $x = g^y$

**Uit $^{g}\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.**

### Voorbeeld

Los exact op.

a $^{2}\log(2x - 1) = 3$
b $1 + 2 \cdot {}^{5}\log(x) = 7$

*Uitwerking*

a $^{2}\log(2x - 1) = 3$
$2x - 1 = 2^3$
$2x - 1 = 8$
$2x = 9$
$x = 4\frac{1}{2}$

b $1 + 2 \cdot {}^{5}\log(x) = 7$
$2 \cdot {}^{5}\log(x) = 6$
$^{5}\log(x) = 3$
$x = 5^3$
$x = 125$

**R71** Bereken $x$.

a $x = {}^{5}\log(0,2)$
b $^{9}\log(x) = \frac{1}{2}$
c $^{x}\log(1000) = 3$

**72** Los exact op.

a $^{3}\log(x + 2) = 2$
c $^{3}\log(2x + 1) = 4$
e $^{\frac{1}{2}}\log(x - 1) = 3$
b $1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 4$
d $5 + {}^{4}\log(x) = 3$
f $^{2}\log(x^2 - 4) = 5$

**A73** Bereken exact de oplossingen.

a $4 \cdot {}^{3}\log(x) = 2$
c $3 + {}^{2}\log(x) = -1$
e $^{3}\log(0,4x - 5) = 2$
b $^{3}\log(4x - 1) = -2$
d $^{5}\log(3x + 2) = 1$
f $4 + 2 \cdot {}^{2}\log(x) = 7$

**O74** Los de vergelijking $2^x = 30$ op. Rond af op twee decimalen.

## Theorie C De vergelijking $g^x = a$

Je weet dat uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.
Zo volgt uit ${}^2\log(30) = x$ dat $2^x = 30$.
Omgekeerd volgt uit $2^x = 30$ dat $x = {}^2\log(30)$.
Daarmee is de vergelijking $2^x = 30$ exact opgelost.

**Exact oplossen van $g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$.**

### Voorbeeld

Los exact op.

**a** $3^{x+1} = 80$ **b** $5 + 2^{3x} = 25$

*Uitwerking*

**a** $3^{x+1} = 80$
$x + 1 = {}^3\log(80)$
$x = -1 + {}^3\log(80)$

**b** $5 + 2^{3x} = 25$
$2^{3x} = 20$
$3x = {}^2\log(20)$
$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20)$

**75** Los exact op.

**a** $2^{x-1} = 15$
**b** $1 + 2^x = 15$
**c** $4 + 3^{x+1} = 25$
**d** $14 - 2^{x+3} = 2$
**e** $7 + 4^{2x} = 12$
**f** $3 \cdot 5^{2x+1} = 60$
**g** $3^{x+2} + 3^x = 600$
**h** $2^{1+2x} = 4^x + 6$

**76** Gegeven is de vergelijking $4^x = 2^{x+2} - 3$.

**a** Toon aan dat de vergelijking te schrijven is als $(2^x)^2 = 4 \cdot 2^x - 3$.

Stel je $2^x = u$, dan krijg je $u^2 = 4u - 3$.

**b** Licht dit toe.

De vergelijking $u^2 = 4u - 3$ heeft de oplossingen $u = 1$ en $u = 3$.

**c** Toon dit aan.
**d** Licht toe dat de vergelijking $4^x = 2^{x+2} - 3$ de oplossingen $x = 0$ en $x = {}^2\log(3)$ heeft.

**77** Los exact op.

**a** $9^x - 3^{x+1} = 4$
**b** $4^x = 2^x + 42$
**c** $2^x = 24 - 2^{2x-1}$
**d** $9^x = 5 \cdot 3^x + 6$

**A78** Los exact op.

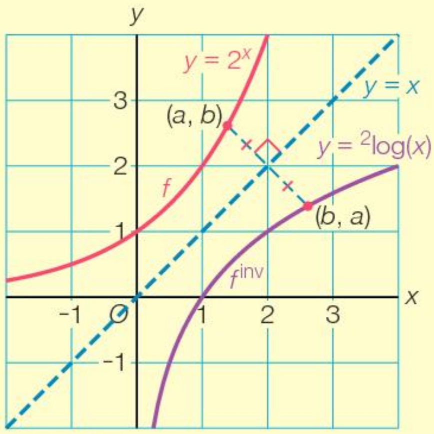
**a** $5^{x-1} + 5^{2x-1} = 4$
**b** $3^x - 2 = 8 \cdot (\frac{1}{3})^x$
**c** $2^x = 6 - 5 \cdot (\frac{1}{2})^x$
**d** $3^x + 2 \cdot (\frac{1}{3})^{x-2} = 9$

**E79** ✱ Los exact op $3 \cdot 27^x + 2 \cdot (\frac{1}{3})^x = 7 \cdot 3^x$.

**080** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.
Toon aan dat $g$ de inverse is van $f$.

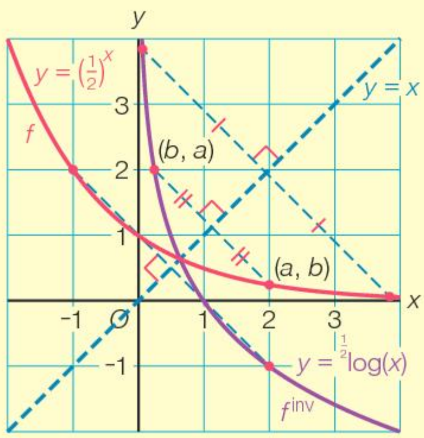
## Theorie D Logaritmische functie

In opgave 80 heb je aangetoond dat de exponentiële functie $f(x) = 2^x$ als inverse de **logaritmische functie** $f^{\text{inv}}(x) = {}^2\log(x)$ heeft. Dus de grafieken van $f$ en $f^{\text{inv}}$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
In figuur 5.8 zijn de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $f^{\text{inv}}(x) = {}^2\log(x)$ getekend. Je ziet dat $D_{f^{\text{inv}}} = B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_{f^{\text{inv}}} = D_f = \mathbb{R}$.
De grafiek van $f$ heeft als horizontale asymptoot de $x$-as, dus de grafiek van $f^{\text{inv}}$ heeft als **verticale asymptoot** de $y$-as.



**figuur 5.8**

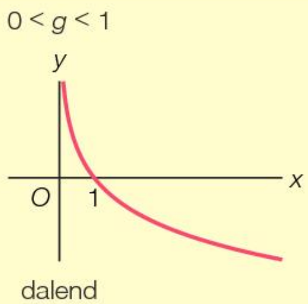
In figuur 5.9 zie je de grafieken van $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ en $f^{\text{inv}}(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$. De grafiek van $f^{\text{inv}}$ is dalend en heeft de $y$-as als verticale asymptoot. Verder is $D_{f^{\text{inv}}} = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_{f^{\text{inv}}} = \mathbb{R}$.
Omdat de functie $f(x) = g^x$ alleen gedefinieerd is voor $g > 0$, moet bij de functie $h(x) = {}^g\log(x)$ ook gelden $g > 0$.
Verder heeft $f(x) = g^x$ geen inverse voor $g = 1$, dus bij $h(x) = {}^g\log(x)$ geldt bovendien $g \neq 1$.

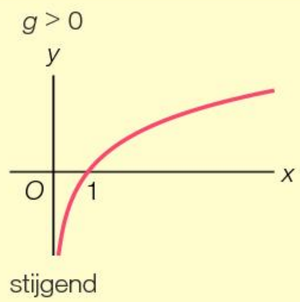


**figuur 5.9**

**De logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$ is alleen gedefinieerd voor $g > 0$ en $g \neq 1$, heeft domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en bereik $\mathbb{R}$.**

**De standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$**

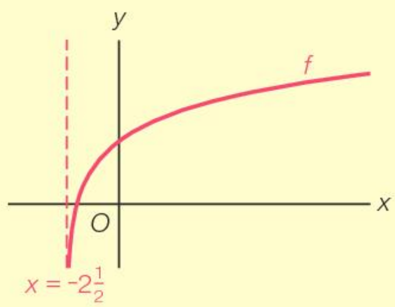



domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$
bereik $\mathbb{R}$
de $y$-as (de lijn $x = 0$) is verticale asymptoot

Bij het schetsen van grafieken van logaritmische functies, teken je ook de verticale asymptoot (als stippellijn) en zet je de formule van de lijn erbij. Bedenk dat de verticale asymptoot aan de rand van het domein zit.

Om het domein van de functie $f(x) = {}^3\log(2x + 5)$ te berekenen, los je de ongelijkheid $2x + 5 > 0$ op. Je krijgt $x > -2\frac{1}{2}$, dus $D_f = \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$. Uit het domein volgt dat de verticale asymptoot van de grafiek van $f$ de lijn $x = -2\frac{1}{2}$ is.




**figuur 5.10**

Het domein van de functie $f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b > 0$.
De verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b = 0$.

**R81**
**a** Geef de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = {}^g\log(ax + b)$.
**b** Los de ongelijkheid ${}^3\log(2x + 5) \leq 2$ exact op. Gebruik figuur 5.10.

**82**
Gegeven is de functie $f(x) = -3 + {}^2\log(5x - 8)$.
**a** Bereken het domein van $f$ geef de formule van de verticale asymptoot van de grafiek van $f$.
**b** Schets de grafiek van $f$.
**c** Los exact op $f(x) \leq 0$.
**d** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 8$?

**A83**
Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 3)$ en $g(x) = {}^3\log(-x + 5)$.
**a** Los algebraïsch op $f(x) = 5$.
**b** De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van $f$ in het punt $A$ en de grafiek van $g$ in het punt $B$.
Bereken exact de lengte van het lijnstuk $AB$.
**c** Los algebraïsch op $f(x) \geq 1$.
**d** Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \geq -4$?

**E84**
De grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x + c) + d$ gaat door de punten $A(4, 1)$ en $B(7, 3)$.
Bereken exact $c$ en $d$.

# Terugblik

### De logaritme

${}^{g}\log(x)$ is de exponent van een macht met grondtal $g$ waarmee de macht gelijk is aan $x$.
Zo is ${}^{3}\log(81) = 4$, want ${}^{3}\log(3^4) = 4$.

En ${}^{3}\log(\frac{1}{9}\sqrt{3}) = {}^{3}\log(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^{3}\log(3^{-1\frac{1}{2}}) = -1\frac{1}{2}$.
Je maakt gebruik van de regel ${}^{g}\log(g^a) = a$.

${}^{g}\log(x) = a$ betekent $x = g^a$

### Logaritmische vergelijkingen

Bij het exact oplossen van vergelijkingen als
${}^{4}\log(5x - 6) = 2$ gebruik je ${}^{g}\log(x) = y$ geeft $x = g^y$.
Dus ${}^{4}\log(5x - 6) = 2$ geeft $5x - 6 = 4^2$, enzovoort.

### De vergelijking $g^x = a$

Bij het exact oplossen van vergelijkingen als
$3^{2x-1} = 5$ en $4^x = 3 \cdot 2^x + 10$ gebruik je
$g^x = a$ geeft $x = {}^{g}\log(a)$.

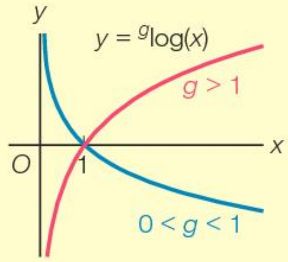
| | |
|---|---|
| $3^{2x-1} = 5$ | $4^x = 3 \cdot 2^x + 10$ |
| $2x - 1 = {}^{3}\log(5)$ | $(2^2)^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$ |
| $2x = 1 + {}^{3}\log(5)$ | $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$ |
| $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^{3}\log(5)$ | Stel $2^x = u$. |
| | Zie verder hiernaast. |

$u^2 - 3u - 10 = 0$
$(u + 2)(u - 5) = 0$
$u = -2 \vee u = 5$
$2^x = -2 \vee 2^x = 5$
$x = {}^{2}\log(5)$

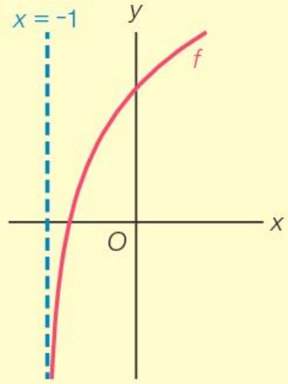
### Grafieken van logaritmische functies

De standaardfunctie $y = {}^{g}\log(x)$
- heeft domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$
- de grafiek is stijgend als $g > 1$ en is dalend als $0 < g < 1$
- heeft bereik $\mathbb{R}$.

De bijbehorende grafiek heeft de $y$-as (de lijn $x = 0$) als verticale asymptoot.




Om de grafiek van $f(x) = {}^{2}\log(x + 1) + 2$ te schetsen, bereken je eerst het domein.
$x + 1 > 0$ geeft $x > -1$, dus $D_f = \langle -1, \rightarrow \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van $f$ is de lijn $x = -1$. Teken in je schets de verticale asymptoot als stippellijn en zet de formule erbij.
Je kunt de schets gebruiken om de ongelijkheid $f(x) \leq 0$ op te lossen.




$f(x) = 0$ geeft ${}^{2}\log(x + 1) + 2 = 0$
${}^{2}\log(x + 1) = -2$
$x + 1 = \frac{1}{4}$
$x = -\frac{3}{4}$
$f(x) \leq 0$ geeft $-1 < x \leq -\frac{3}{4}$

# Eindopdracht Gravitatiekracht

De gravitatiekracht is een aantrekkingskracht tussen twee voorwerpen. Hierbij is geen contact tussen de voorwerpen nodig. Het is de kracht die ervoor zorgt dat de zon en zijn planeten elkaar zo aantrekken, dat de planeten in een baan om de zon bewegen. Ook de aarde en de maan trekken elkaar aan, zodat de maan een (vrijwel) cirkelvormige baan om de aarde maakt.

Zoals je in de beginopdracht hebt gezien, geldt voor cirkelvormige banen de middelpuntzoekende (centripetale) kracht $F_{\text{mpz}} = \frac{mv^2}{r}$. Pas je de wet $F = m \cdot a$ toe, dan krijg je de middelpuntzoekende versnelling $a_{\text{mpz}} = \frac{v^2}{r}$ die gericht is naar het middelpunt van de cirkel.
Newton toonde aan dat de centripetale versnelling van de maan ongeveer gelijk is aan $\frac{g}{3600}$ m/s$^2$, waarbij $g$ de versnelling van de zwaartekracht op de aarde is. Hij gebruikte dat de afstand $r$ tussen de middelpunten van de aarde en de maan 384 000 km is, de omlooptijd $T$ van de maan 27,3 dagen en de versnelling $g$ van de zwaartekracht op de aarde ongeveer 9,81 m/s$^2$.

- Laat met een berekening zien dat de centripetale versnelling van de maan ongeveer gelijk is aan $\frac{g}{3600}$ m/s$^2$. Gebruik ook de formule $v = \frac{2\pi r}{T}$ uit de beginopdracht.

Uit dit resultaat en uit het feit dat de straal van de aarde ongeveer 6378 km is, trok Newton de conclusie dat voor de gravitatiekracht $F_{\text{G}}$ tussen twee voorwerpen geldt $F_{\text{G}} = \frac{c}{r^2}$.

- Licht deze conclusie toe met een berekening en een redenering.

Omdat de aarde twee keer zo hard trekt aan een voorwerp met een twee keer zo grote massa, bedacht Newton dat de aantrekkingskracht tussen twee voorwerpen evenredig moet zijn met het product van de massa's van de beide voorwerpen. Zo kwam hij tot de formule $F_{\text{G}} = \text{G} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Hierin is G de universele gravitatieconstante, $m_1$ de massa van het eerste voorwerp, $m_2$ de massa van het tweede voorwerp en $r$ de afstand tussen de zwaartepunten van de massa's.

Henry Cavendish was in 1798 de eerste die een redelijke benadering van G heeft gevonden. Een van de eerste berekeningen die Cavendish hiermee maakte, was het berekenen van de massa van de aarde.
Voor de kracht tussen een voorwerp met massa $m$ en de aarde met massa $m_A$ geldt $F_G = G \cdot \frac{m \cdot m_A}{r^2}$. Ook geldt $F_Z = m \cdot g$.

Uit $F_G = F_Z$ volgt dat $m_A = \frac{r^2 g}{G}$. Deze formule kun je gebruiken om te berekenen dat de massa van de aarde ongeveer $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg is. Gebruik $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$.

- Toon aan dat uit $F_G = F_Z$ volgt dat $m_A = \frac{r^2 g}{G}$ en gebruik dit om aan te tonen dat de massa van de aarde ongeveer $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg is. Gebruik hierbij $g = 9{,}81\ m/s^2$.
- Bereken de gemiddelde massadichtheid van de aarde. Geef het antwoord in $kg/dm^3$ en rond af op één decimaal. Gebruik dat de inhoud van een bol met straal $r$ gelijk is aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Niet overal op de aarde is de versnelling van de zwaartekracht even groot. Deze versnelling is bijvoorbeeld afhankelijk van de afstand tot het middelpunt van de aarde. Zo is de afstand van de top van de Mount Everest tot het middelpunt van de aarde gelijk aan 6387 km, terwijl de straal van de aarde 6378 km is.

- Bereken de waarde van $g$ voor de top van de Mount Everest. Rond af op twee decimalen.

Om de aarde cirkelen veel satellieten, die voor tal van zaken worden gebruikt. Denk aan satelliettelevisie, GPS, communicatie zoals satelliettelefoon, enzovoort. Sommige van deze satellieten gaan zo snel dat ze een omlooptijd van slechts 30 minuten hebben. Bij andere satellieten is het van belang dat ze op een vast punt boven de aarde staan. Dit zijn zogenaamde geostationaire satellieten. Deze satellieten hebben dus een omlooptijd van 24 uur en staan recht boven een vast punt van de evenaar. Om in de juiste baan om de aarde te blijven, moeten de hoogte en de snelheid van de satelliet vaste waarden hebben.

- Toon aan dat uit bovenstaande formules volgt dat voor de baansnelheid $v$ van een satelliet geldt dat $v^2 = G \cdot \frac{m_A}{r}$. Hierin is $m_A$ de massa van de aarde en $r$ de straal van de baan van de satelliet. Gebruik deze formule om van een geostationaire satelliet de hoogte boven het aardoppervlak en de baansnelheid te berekenen. Rond de hoogte af op honderden km. Geef de baansnelheid in km/uur en rond af op tientallen.

# Diagnostische toets

## 5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten

**1** Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

**a** $(3a^{-5}b^4)^{-2}$ **c** $3a^{1\frac{1}{3}}b^{-3}$ **e** $a^{-2}b^{\frac{1}{5}}$

**b** $(\frac{2}{3}a^{-2}b)^{-2}$ **d** $(a^{-\frac{1}{4}})^3$ **f** $7a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}}$

**2** Schrijf als macht van $x$.

**a** $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$ **b** $x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ **c** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

**3** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

**a** $y = 3x^{-3}(\frac{1}{2}x^2)^3$ **b** $y = \dfrac{1}{5x^2 \cdot \sqrt{x}}$ **c** $y = \dfrac{12}{5x^{-3}} \cdot \sqrt[5]{x^3}$

**4** Los exact op.

**a** $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 128$ **b** $(2x+3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$ **c** $112 - 2x^{-4} = 5x^{-4}$

**5** Maak $x$ vrij. Rond zo nodig af op twee decimalen.

**a** $y = 0{,}02x^{-1\frac{3}{5}}$ **b** $y = \frac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ **c** $y = \dfrac{20}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

## 5.2 Machtsfuncties en wortelfuncties

**6** De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^4 - 6$ wordt eerst vermenigvuldigd met $-4$ ten opzichte van de $x$-as, vervolgens wordt de translatie $(3, -15)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g$. Bereken de extreme waarde van $g$.

**7** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ en $g(x) = -2 - \sqrt{x+4}$.

**a** Hoe ontstaan de grafieken van $f$ en $g$ uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?

**b** Schets de grafieken van $f$ en $g$.

**c** Geef $D_f$, $B_f$, $D_g$ en $B_g$.

**8** Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{3-4x}$.

**a** Schets de grafiek van $f$ en geef $B_f$.

**b** Los algebraïsch op $f(x) > 2$.

**c** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -\frac{1}{4}$?

**9** **a** Schrijf $t$ als functie van $N$ bij de formule $N = 2\sqrt{-5t+1}$.

**b** Maak $y$ vrij bij de formule $2x\sqrt{y} - 6\sqrt{x} = 1$.

## 5.3 Exponentiële functies

**10** Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}3 \cdot 2^{x+2} - 5$.

**a** Hoe ontstaat de grafiek van $f$ uit een standaardgrafiek?

**b** Geef van $f$ het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.

**c** Los op $f(x) \leq 1$. Rond af op twee decimalen.

**11** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

**a** $y = 2^x \cdot 2^{-4x+3}$ **b** $y = 108 \cdot 3^{4x-3}$ **c** $y = \dfrac{250}{5^{-2x+3}}$

**12** Los exact op.

**a** $5^{x-1} = 125\sqrt{5}$ **c** $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$ **e** $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36$

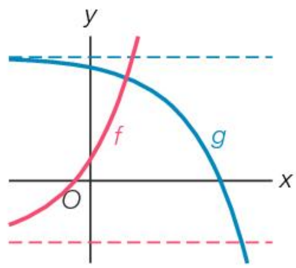
**b** $3^{2x-5} = (\frac{1}{27})^x$ **d** $9^{x-1} = 27^{x+1}$ **f** $2^{x^2} = (\frac{1}{8})^x$

**13** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x+2} - 3$ en $g(x) = 6 - 2^{x-1}$.

**a** Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

**b** Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq 4$?

**c** Voor welke $p$ heeft de vergelijking $f(x) + g(x) = p$ geen oplossing?



**figuur 5.11**

## 5.4 Logaritmen

**14** Bereken.

**a** ${}^3\log(3\sqrt{3})$ **b** ${}^2\log(\frac{1}{4}\sqrt{8})$ **c** ${}^2\log(\frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{2})$

**15** Los exact op.

**a** ${}^4\log(2x - 3) = 2$ **b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 3) = -4$ **c** $5 + 3 \cdot {}^2\log(x) = 20$

**16** Los exact op.

**a** $7^{x-3} = 20$ **b** $4^x - 2^{x+4} = 80$ **c** $5^{x+1} - 6 \cdot (\frac{1}{5})^{x-1} = 25$

**17** Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(3x - 1) + 2$.

**a** Los exact op $f(x) \leq 4$.

**b** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 3$?

# 6

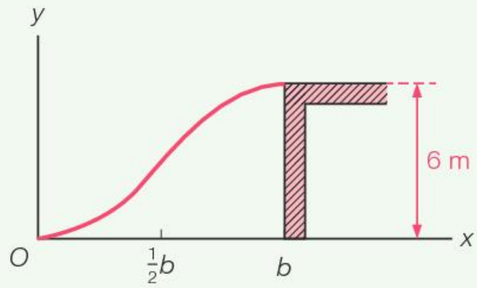
# Differentiaalrekening

**Wat leer je?**

- Hoe je algebraïsch extreme waarden berekent.
- De betekenis van de tweede afgeleide.
- Wat buigpunten zijn en hoe je de coördinaten hiervan berekent.
- Afgeleiden berekenen van machtsfuncties met negatieve en gebroken exponenten.
- De kettingregel gebruiken voor het differentiëren, ook in combinatie met de productregel en de quotiëntregel.
- Rekenen aan grafieken die elkaar raken en aan grafieken die elkaar loodrecht snijden.

# Beginopdracht De helling van een fietsbrug

Er is geen strikte regelgeving over het maximale hellingspercentage van de oprit van een fietsbrug, maar als de oprit ergens te steil is wordt de brug gemeden door fietsers.
In deze opdracht gaan we uit van een oprit die een hoogteverschil van 6 meter moet overwinnen. Hiervoor wordt een maximaal hellingspercentage van 3% aangehouden.
Het begin en het eind van de oprit zijn horizontaal.
Je gaat onderzoeken hoe lang (horizontaal gemeten) de oprit dan moet zijn.
Ga uit van het functievoorschrift $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}abx^2$. Zie de figuur hiernaast.
De gevraagde lengte is dus $b$.
Bij dit functievoorschrift geldt dat de maximale helling (dus het maximale hellingspercentage) optreedt bij $x = \frac{1}{2}b$.
Omdat het begin en het eind van de oprit horizontaal zijn, moet gelden dat $f'(0) = 0$ en $f'(b) = 0$.




- Controleer of inderdaad geldt dat $f'(0) = 0$ en $f'(b) = 0$.

Door gebruik te maken van $f(b) = 6$, kun je $a$ uitdrukken in $b$.

- Druk $a$ uit in $b$ en toon aan dat geldt $f(x) = \frac{-12}{b^3}x^3 + \frac{18}{b^2}x^2$.
- Bereken $b$ door te gebruiken dat $f'(\frac{1}{2}b) = 0{,}03$.
- Bereken het hellingspercentage van de oprit bij $x = 100$.

De maximale helling in een ondergrondse parkeergarage is 20%.

- Bereken in meter nauwkeurig welke lengte (horizontaal gemeten) een afrit naar deze parkeergarage moet zijn om een hoogteverschil van 3,5 meter te overwinnen. Ga weer uit van het functievoorschrift $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}abx^2$.

# Voorkennis Afgeleide en raaklijn

## Theorie A Definitie van en regels voor de afgeleide

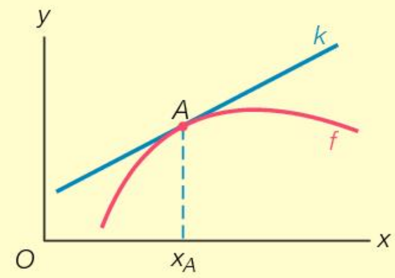
Per definitie is de afgeleide $f'$ van een functie $f$ gelijk aan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

De afgeleide van een functie $f$ geeft voor elke $x$

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $k$ van de grafiek van $f$ in het bijbehorende punt $A$, dus $\text{rc}_k = f'(x_A)$
- de helling van de grafiek van $f$ in het bijbehorende punt
- de snelheid waarmee $f(x)$ verandert.

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.




**figuur 6.1** $\text{rc}_k = f'(x_A)$

**Regels voor de afgeleide**

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$

$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ voor $n = 2, 3, 4, \ldots$

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)

$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ (verschilregel)

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (productregel)

$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ (quotiëntregel)

### Voorbeeld

Differentieer.

**a** $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$

**b** $g(x) = (3x^2 - 1)^2$

**c** $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

*Uitwerking*

**a** $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$ geeft $f'(x) = 12x^2 - 14x + 5$

**b** $g(x) = (3x^2 - 1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$ geeft $g'(x) = 36x^3 - 12x$

**c** $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ geeft

$$h'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2x - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

**1** Differentieer.

**a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$

**b** $g(x) = (5x^2 - 2)^2$

**c** $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2+4}$

**d** $k(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$

**e** $l(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$

**f** $m(x) = 2x^2 - \dfrac{6}{x+1}$

## Theorie B Raaklijn, snelheid en afgeleide

Bij het opstellen van de formule van de raaklijn $k$ met behulp van de afgeleide gebruik je dat voor een punt $A$ op de grafiek van $f$ geldt dat $f'(x_A)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $k$ in $A$ is.

Is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt $B$ gelijk aan 3, dan bereken je de coördinaten van $B$ met behulp van de vergelijking $f'(x) = 3$.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$.

**a** Op de grafiek van $f$ ligt het punt $A$ met $x_A = 2$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn $k$ in $A$.

**b** In de punten $B$ en $C$ van de grafiek van $f$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 3.
Bereken algebraïsch de coördinaten van $B$ en $C$.

*Uitwerking*

**a** $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$
Stel $k$: $y = ax + b$ met $a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 6 = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(2) = -3, \text{ dus } A(2, -3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = -3 \\ -4 + b = -3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k$: $y = -2x + 1$.

**b** $f'(x) = 3$ geeft $3x^2 - 10x + 6 = 3$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 &= 64 \\ x = \frac{10+8}{6} = 3 \vee x &= \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$x_B = \frac{1}{3}$ geeft $y_B = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{14}{27}$, dus $B(\frac{1}{3}, -1\frac{14}{27})$.

$x_C = 3$ geeft $y_C = f(3) = -3$, dus $C(3, -3)$.

**2** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$.

**a** De grafiek van $f$ snijdt de $y$-as in het punt $A$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn $k$ in $A$.

**b** In de punten $B$ en $C$ van de grafiek van $f$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 1.
Bereken algebraïsch de coördinaten van $B$ en $C$.

**3** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$.

**a** Op de grafiek van $f$ ligt het punt $A$ met $x_A = 2$.
Stel met behulp van differentiëren de formule op van de raaklijn $k$ in $A$.

**b** In de punten $B$ en $C$ van de grafiek van $f$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $\frac{3}{4}$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van $B$ en $C$.

# 6.1 Toppen en buigpunten

**01**

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 18x + 50$.
De punten $A$ en $B$ zijn toppen van de grafiek van $f$.
Wat weet je van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in elk van die punten? Bereken algebraïsch de $x$-coördinaten van $A$ en $B$.

## Theorie A Algebraïsch berekenen van extreme waarden

Omdat in een top van de grafiek van een functie $f$ de raaklijn horizontaal is, kun je de $x$-coördinaat van de top berekenen door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.
Uit de grafiek van $f$ volgt of de extreme waarde die bij de top hoort een minimum of een maximum is.

**Werkschema: algebraïsch berekenen van extreme waarden**

1. Bereken $f'(x)$.
2. Los algebraïsch op $f'(x) = 0$.
3. Voer de formule van $f$ in op de GR, plot de grafiek en schets de grafiek. Kijk in de grafiek of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
4. Bereken de $y$-coördinaten van de toppen en noteer het antwoord in de vorm max. is $f(...) = ...$ of min. is $f(...) = ...$

Is de grafiek van de functie gegeven, dan is het niet nodig een schets van de grafiek te maken. Wel is het verstandig om de formule in te voeren op de GR en achteraf met de opties maximum en minimum te controleren of je de extreme waarden goed hebt berekend.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van $f$.

*Uitwerking*

$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$ geeft $f'(x) = 12x^2 - 18x - 120$

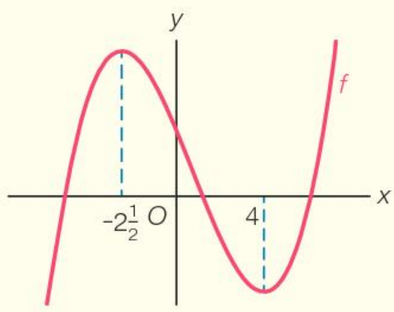
$f'(x) = 0$ geeft $12x^2 - 18x - 120 = 0$

$$2x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 169$$

$$x = \frac{3 + 13}{4} = 4 \vee x = \frac{3 - 13}{4} = -2\frac{1}{2}$$

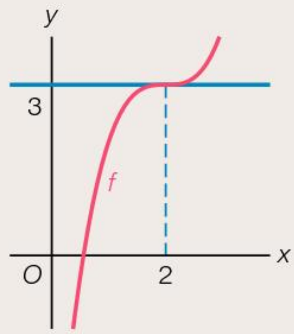
max. is $f(-2\frac{1}{2}) = 331\frac{1}{4}$ en min. is $f(4) = -218$.



INFORMATIEF

## Afgeleide = 0 en top van de grafiek

In het werkschema staat bij 3 dat je een schets moet maken van de grafiek. Dit is nodig omdat je na het oplossen van de vergelijking 'afgeleide = 0' nog niet weet of je met een minimum of een maximum te maken hebt. Bovendien zijn de beweringen 'afgeleide = 0' en 'de grafiek heeft een top' niet gelijk.
Zo is bij de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ wel $f'(2) = 0$, maar de grafiek heeft geen top voor $x = 2$. De grafiek heeft een horizontale raaklijn in het punt (2, 3).



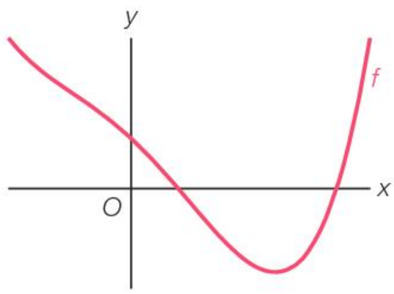

**2**
**a** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van $f$.
**b** Gegeven is de functie $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 2$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van $g$ en geef het bereik.

**3** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 4}$.
**a** Bereken algebraïsch de extreme waarden van $f$ en geef het bereik.
**b** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn $k$ die de grafiek van $f$ raakt in het punt $A$ met $x_A = 6$.
**c** Los algebraïsch op $f(x) < 1$.

**A4** Voor elke waarde van $p$ is de functie $f_p$ gegeven door $f_p(x) = (x^2 + p)(x^2 - 16)$.
**a** Bereken van $f_{-2}$ algebraïsch de extreme waarden en geef het bereik.
**b** Bereken exact voor welke $p$ het punt $A$ met $x_A = 2$ een top is van de grafiek van $f_p$.

**A5** Gegeven is de functie $f_p$ van opgave 4.
De grafiek van $f_p$ heeft een top $B$ waarvoor geldt dat $p = 14 \cdot x_B$.
Bereken algebraïsch voor welke $p$ dit het geval is en bereken voor deze $p$ het bereik van $f_p$.

**O6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $f$.
**a** Bereken $f'(x)$.
**b** Toon met een berekening aan dat $f'(2) = 0$.
**c** Hoe volgt uit vraag b en de schets in figuur 6.2 dat $f$ een extreme waarde heeft voor $x = 2$?




**figuur 6.2**

## Theorie B Aantonen van extreme waarden

Bij het met de afgeleide aantonen dat een functie $f$ een extreme waarde heeft voor $x = a$ volg je het werkschema hieronder.

**Werkschema: met de afgeleide aantonen dat de functie *f* een extreme waarde heeft voor *x* = *a***

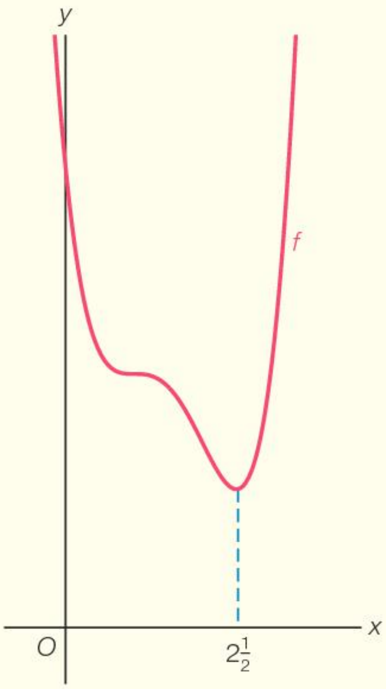
**1** Bereken $f'(x)$.
**2** Laat met een berekening zien dat $f'(a) = 0$.
**3** Schets de grafiek van $f$ en laat zien dat de grafiek een top heeft voor $x = a$.

In het voorbeeld wordt aangetoond dat de functie $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$ een extreme waarde heeft voor $x = 2\frac{1}{2}$.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$
Toon met de afgeleide aan dat $f$ een extreme waarde heeft voor $x = 2\frac{1}{2}$.

*Uitwerking*
$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$
$f'(2\frac{1}{2}) = 4 \cdot (2\frac{1}{2})^3 - 18 \cdot (2\frac{1}{2})^2 + 24 \cdot 2\frac{1}{2} - 10 = 62\frac{1}{2} - 112\frac{1}{2} + 60 - 10 = 0$




$f'(2\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2\frac{1}{2}$.
Dus $f$ heeft een extreme waarde voor $x = 2\frac{1}{2}$.

**R7** Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$ van het voorbeeld.

**a** Toon algebraïsch aan dat $f'(1) = 0$.
Heeft de functie een extreme waarde voor $x = 1$? Licht toe.

**b** De grafiek van $f$ heeft twee horizontale raaklijnen.
Stel van deze lijnen een vergelijking op.

**8**

**a** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$.
Toon met de afgeleide aan dat $f$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}$.

**b** Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$.
Toon met de afgeleide aan dat $g$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{3}$.

**9** Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$.

**a** Toon met de afgeleide aan dat $f$ geen extreme waarde heeft voor $x = 1$.

**b** Toon met de afgeleide aan dat $f$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

**A10** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$.

**a** Toon met de afgeleide aan dat $f$ een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

De noemer is te ontbinden in $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

**b** Toon dit aan.

**c** Los de vergelijking $f'(x) = 0$ algebraïsch op door eerst de formule van $f$ te vereenvoudigen.

**O11** Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 5$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $f$ met de toppen $A(-1, -13)$ en $B(5, 95)$.

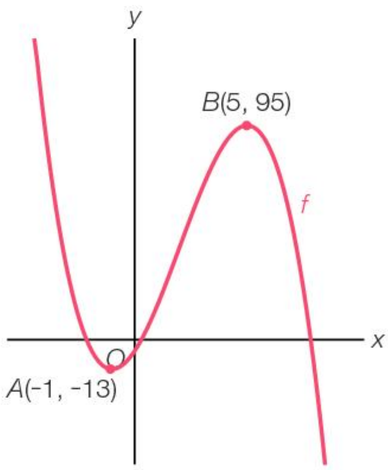
**a** Op welke intervallen is de grafiek van $f$ dalend? En op welk interval stijgend? Welke soorten van stijgen herken je? Geef de bijbehorende intervallen.

**b** Bereken $f'(x)$ en schets de grafiek van $f'$.

De grafiek van $f'$ heeft een hoogste punt voor $x = x_P$.

**c** Bereken $x_P$.

**d** Wat heeft $x = x_P$ te maken met de verschillende soorten van stijgen van de grafiek van $f$? Licht toe.

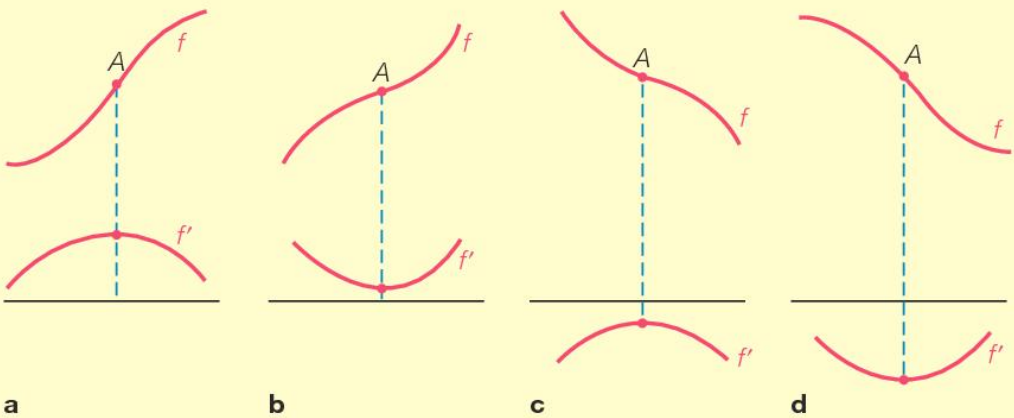


**figuur 6.3**

## Theorie C Buigpunt en buigraaklijn

In opgave 11 heb je gezien dat je bij het maximum van de afgeleide $f'$ van $f$ te maken hebt met een overgang van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij de grafiek van $f$.
Immers, bij een toenemend stijgend deel van de grafiek hoort een positieve helling die steeds groter wordt en bij een afnemend stijgend deel van de grafiek hoort een positieve helling die steeds kleiner wordt.
In het punt waar de toenemende stijging overgaat in afnemende stijging hoort dus een maximale helling, dus een maximum van de afgeleide.
Het punt op de grafiek van $f$ waar deze overgang plaatsvindt, heet een **buigpunt** van de grafiek.
Ook bij de overgangen
- van afnemend stijgend naar toenemend stijgend
- van toenemend dalend naar afnemend dalend
- van afnemend dalend naar toenemend dalend

heb je te maken met een buigpunt.
Zie figuur 6.4.




**figuur 6.4** De vier mogelijkheden voor een buigpunt.

Merk op dat in elk van de vier gevallen de afgeleide een extreme waarde heeft.

**De grafiek van $f$ heeft een buigpunt als de afgeleide $f'$ een extreme waarde heeft.**

Bij het algebraïsch berekenen van de coördinaten van een buigpunt heb je dus de afgeleide van $f'$ nodig.
De afgeleide van $f'$ heet de **tweede afgeleide** van $f$ en wordt genoteerd als $f''$. Uitspraak: $f$ dubbel accent.
De raaklijn in een buigpunt heet **buigraaklijn**.

Voor het algebraïsch berekenen van de coördinaten van buigpunten gebruik je het volgende werkschema.

**Werkschema: algebraïsch coördinaten van buigpunten berekenen**

**1** Bereken $f'(x)$ en $f''(x)$.
**2** Los algebraïsch op $f''(x) = 0$.
**3** Schets de grafiek van $f$.
**4** Kijk of de oplossingen van $f''(x) = 0$ buigpunten opleveren.
**5** Bereken de bijbehorende $y$-coördinaten.

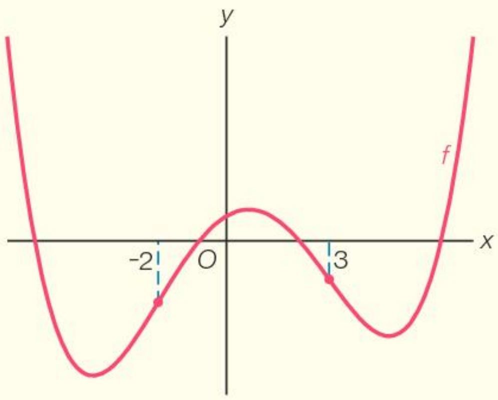
**Voorbeeld**

Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + 5$.

*Uitwerking*

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$
$f''(x) = x^2 - x - 6$
$f''(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$
$f(-2) = -12\frac{1}{3}$ en $f(3) = -7\frac{3}{4}$.
Uit de schets volgt dat $(-2, -12\frac{1}{3})$ en $(3, -7\frac{3}{4})$ de buigpunten zijn.




**12** **a** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5$.
**b** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de buigraaklijn $k$ van de grafiek van $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4$.

**13** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$.
**a** Bereken algebraïsch de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f$.
**b** De grafiek van $f$ heeft een horizontale buigraaklijn.
Toon dit aan.

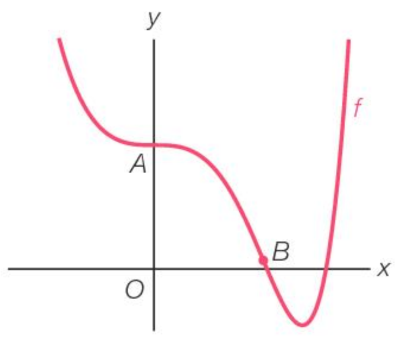
**14** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$.
**a** Toon algebraïsch aan dat de grafiek van $f_5$ twee buigpunten heeft.
**b** Toon algebraïsch aan dat de grafiek van $f_6$ geen buigpunten heeft.
**c** Bereken algebraïsch voor welke waarden van $p$ de grafiek van $f_p$ geen buigpunten heeft.
**d** Onderzoek of het mogelijk is dat de grafiek van $f_p$ één buigpunt heeft.

**A15** Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 5$.
In figuur 6.5 zie je de grafiek van $f$.

**a** De grafiek van $f$ heeft één top.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

**b** De grafiek van $f$ snijdt de $y$-as in het punt $A$.
Onderzoek of $A$ een buigpunt is.

**c** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt $B$ van de grafiek van $f$.



**figuur 6.5**

**A16** Bereken exact voor welke waarden van $p$ de grafiek van $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$ twee buigpunten heeft.

**A17** Gegeven is de derdegraadsfunctie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

**a** Toon aan dat de grafiek van elke derdegraadsfunctie precies één buigpunt heeft.

Gegeven is verder dat de grafiek van $f$ de toppen $P$ en $Q$ heeft.

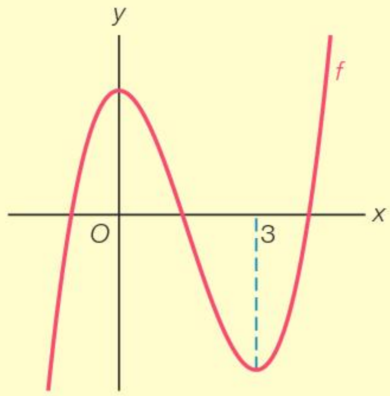
**b** Toon aan dat hieruit volgt dat $b^2 > 3ac$.

**c** Toon aan dat voor het buigpunt $R$ geldt dat $x_R = \dfrac{x_P + x_Q}{2}$.

# Terugblik

## Extreme waarden

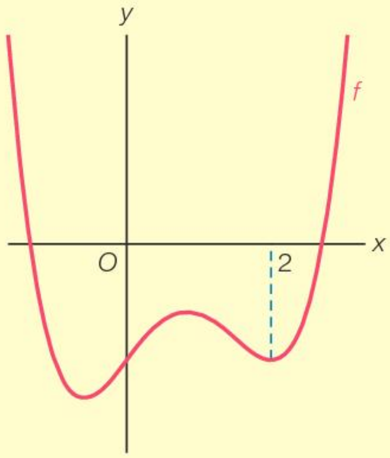
Bij het algebraïsch berekenen van extreme waarden gebruik je dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een top van de grafiek nul is, dus $f'(x) = 0$. Nadat je de vergelijking $f'(x) = 0$ hebt opgelost, maak je een schets van de grafiek waarin je kijkt of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
Bij de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4$ krijg je $f'(x) = 2x^2 - 6x$.
$f'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 6x = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 3$.
Zie de schets hiernaast.
Je krijgt max. is $f(0) = 4$ en min. is $f(3) = -5$.




## Extreme waarden aantonen

Bij het algebraïsch aantonen dat de functie $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ voor $x = 2$ een extreme waarde heeft, ga je als volgt te werk.

1. Bereken $f'(x)$.
   Je krijgt $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$.
2. Bereken $f'(2)$.
   Je krijgt $f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 4 = 32 - 36 + 4 = 0$.
3. $f'(2) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek van $f$ een top heeft voor $x = 2$, dus $f$ heeft een extreme waarde voor $x = 2$.




## Tweede afgeleide, buigpunt en buigraaklijn

De $x$-coördinaat van een buigpunt van de grafiek van een functie $f$ bereken je door de vergelijking $f''(x) = 0$ op te lossen. In een schets van de grafiek van $f$ zie je of een gevonden oplossing een buigpunt oplevert.
Bij de functie $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ (zie hierboven) krijg je $f''(x) = 12x^2 - 18x$.
$f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 18x = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$.
Uit de schets van de grafiek van $f$ volgt dat er bij zowel $x = 0$ als $x = 1\frac{1}{2}$ een buigpunt is. De buigpunten zijn $(0, -5)$ en $(1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{16})$.

Een lijn die een grafiek raakt in een buigpunt heet buigraaklijn.
Bij de grafiek van $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ stel je de formule van de buigraaklijn $k$ in het punt $(1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{16})$ als volgt op.
$k$: $y = ax + b$ met $a = f'(1\frac{1}{2}) = 4 \cdot (1\frac{1}{2})^3 - 9 \cdot (1\frac{1}{2})^2 + 4 = -2\frac{3}{4}$,
dus $k$: $y = -2\frac{3}{4}x + b$.
Invullen van de coördinaten van het buigpunt $(1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{16})$ geeft $b = \frac{1}{16}$, dus $k$: $y = -2\frac{3}{4}x + \frac{1}{16}$.

# 6.2 De afgeleide van machtsfuncties

018

**a** Schrijf in de vorm $ax^n$.

$\frac{4}{x^2}$ $\frac{6}{x^3}$ $\frac{5}{x^4}$ $\frac{1}{3x^2}$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

**b** Schrijf zonder negatieve exponent.

$x^{-4}$ $3x^{-2}$ $-2x^{-3}$ $\frac{1}{7}x^{-6}$

**c** Schrijf in de vorm $ax^n + bx^m$.

$\frac{x^3 + 5x^2}{x}$ $\frac{4x^2 + 7x}{x^3}$ $\frac{2x^5 + 5x^2}{3x^4}$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

**d** Schrijf als één breuk.

$\frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2}$ $\frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2}$ $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4x}$

019

**a** Toon met behulp van de quotiëntregel aan dat $f(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$.

**b** Licht toe dat uit a volgt dat $f(x) = x^{-2}$ geeft $f'(x) = -2x^{-3}$.

**c** Toon met behulp van de quotiëntregel aan dat $g(x) = x^{-5}$ geeft $g'(x) = -5x^{-6}$.

## Theorie A De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor gehele $n$

In opgave 19 heb je gezien dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ ook geldt voor enkele negatieve waarden van $n$.
We gaan nu bewijzen dat deze regel geldt voor elke negatieve gehele waarde van $n$.
We gaan uit van $f(x) = x^{-p}$, waarin $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$f(x) = x^{-p} = \frac{1}{x^p} \text{ geeft } f'(x) = \frac{x^p \cdot [1]' - 1 \cdot [x^p]'}{(x^p)^2}$$

$$= \frac{x^p \cdot 0 - 1 \cdot p \cdot x^{p-1}}{x^{2p}}$$

$$= \frac{-p \cdot x^{p-1}}{x^{2p}}$$

$$= -p \cdot x^{-p-1}$$

Vervangen we $-p$ door $n$, dan krijgen we
$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ met $n = -1, -2, -3, -4, \ldots$

In opgave 20 toon je aan dat deze regel ook geldt voor $n = 0$ en $n = 1$.

**$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elk geheel getal $n$.**

**Voorbeeld**

Bereken de afgeleide.

**a** $f(x) = \dfrac{6}{x^3}$

**b** $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3x^2}$

*Uitwerking*

**a** $f(x) = \dfrac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} = -\dfrac{18}{x^4}$

**b** $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3x^2} = \dfrac{x^3}{3x^2} + \dfrac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^{-2}$ ← $\boxed{\dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}}$

geeft $g'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} - \dfrac{2}{3x^3} = \dfrac{x^3}{3x^3} - \dfrac{2}{3x^3} = \dfrac{x^3 - 2}{3x^3}$

**Afspraak**

- Is een functievoorschrift gegeven zonder negatieve exponenten, dan noteer je de afgeleide ook zonder negatieve exponenten.
- Is een functievoorschrift als één breuk geschreven, dan noteer je de afgeleide ook als één breuk.

**R20**

**a** Toon aan dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ ook geldt voor $n = 0$ en $n = 1$.

**b** In voorbeeld b lukte het om de afgeleide te berekenen met behulp van uitdelen.
Welke van de volgende functies kun je differentiëren door uit te delen?

$f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x^3}$ $\quad h(x) = \dfrac{x + 2}{4x}$ $\quad k(x) = \dfrac{4x}{x + 2}$

**21** Bereken de afgeleide.

**a** $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$ **b** $g(x) = 5 - \dfrac{3}{x^2}$ **c** $h(x) = ax^4 - \dfrac{b}{x^4}$

**22** Differentieer.

**a** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x^2}$ **b** $g(x) = \dfrac{3x^2}{2x - 1}$ **c** $h(x) = \dfrac{3x^6 - 3}{x^3}$

**23** Bereken de afgeleide.

**a** $f(x) = 5x^2 - \dfrac{5}{x^2}$ **b** $g(x) = \dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{2x^2}{5}$ **c** $h(x) = 6 - \dfrac{x^2 - 1}{x}$

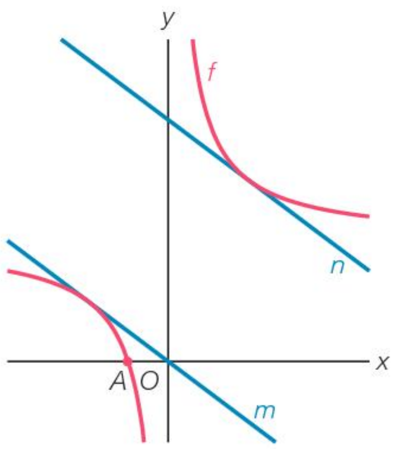
**24**

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x+3}{x}$.

De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in het punt $A$.

**a** Stel algebraïsch een vergelijking op van de raaklijn $k$ van de grafiek in $A$.

**b** De lijnen $m$ en $n$ met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$ raken de grafiek van $f$.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.




**figuur 6.6**

**A25**

Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$.

**a** Op de grafiek van $f$ ligt het punt $A$ met $x_A = 2$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn $k$ in $A$.

**b** Op de grafiek van $g$ ligt het punt $B$ met $x_B = 2$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn $l$ in $B$.

**c** Bewijs dat de grafiek van $g$ geen buigpunt heeft.

**A26**

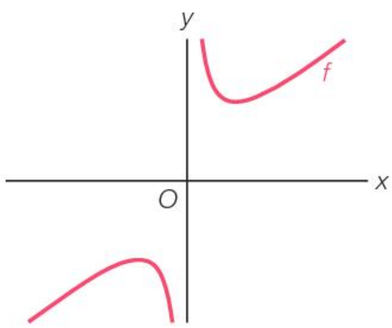
Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

**a** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**b** De grafiek van $f$ heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-3$.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

**c** Onderzoek langs algebraïsche weg of de grafiek een raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt 2.

**d** Bewijs dat de lijn $k$: $y = \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3}$ de grafiek van $f$ raakt.




**figuur 6.7** De grafiek van $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ heeft twee toppen.

**A27**

Voor $a > 0$ zijn gegeven de functies $f_a(x) = \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{a}{x^2}$.

Bewijs dat voor elke waarde van $a$ de toppen van de grafiek van $f_a$ op de lijn $y = 2$ liggen.

**O28**

Schrijf als macht van $x$.

**a** $\sqrt{x}$ **b** $x^2 \cdot \sqrt{x}$ **c** $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ **d** $x^3 \cdot \sqrt{x}$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$
$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$
$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

**O29**

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponent.

**a** $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ **b** $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}$ **c** $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}}$ **d** $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$

**030** In deze opgave ga je bewijzen dat $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

**a** Toon aan dat uit $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$ volgt $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$.

**b** Licht toe dat uit $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$ volgt $[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

## Theorie B De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor elke $n$ van $\mathbb{R}$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt ook voor gebroken waarden van $n$. Hiervan heb je in opgave 30 een voorbeeld gezien. De regel geldt zelfs voor elk getal $n$ van $\mathbb{R}$.

**$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elke $n$ van $\mathbb{R}$.**

Het bewijs van deze regel geef je in deel 3.

Om $f(x) = x\sqrt{x}$ te differentiëren, schrijf je eerst het functievoorschrift van $f$ in de vorm $f(x) = x^n$. Je krijgt $f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1\frac{1}{2}}$ en dit geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Vervolgens schrijf je $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ zonder gebroken exponent, dus $f'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

**Afspraak**
Bij het differentiëren mag je in het antwoord alleen gebroken exponenten laten staan als het functievoorschrift zelf ook met gebroken exponenten is gegeven.

### Voorbeeld

Differentieer.

**a** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

**b** $g(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

**c** $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 4}{x^2}$

*Uitwerking*

**a** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

**b** $g(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{2\frac{1}{3}}$ geeft $g'(x) = 2\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}} = 2\frac{1}{3} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2\frac{1}{3}x \cdot \sqrt[3]{x}$

**c** $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 4}{x^2} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \dfrac{4}{x^2} = x^{-1\frac{2}{3}} + 4x^{-2}$ geeft

$$h'(x) = -1\tfrac{2}{3}x^{-2\frac{2}{3}} - 8x^{-3} = -\tfrac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{2}{3}}} - \frac{8}{x^3} = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{8}{x^3}$$

$$= -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{24}{3x^3} = \frac{-5 \cdot \sqrt[3]{x} - 24}{3x^3}$$

**31** Differentieer.

a $f(x) = x + \sqrt{x}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

**32** Bereken de afgeleide.

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$

c $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x})$

d $k(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt[3]{x}}$

**33** Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3)$

**A34** Bereken de afgeleide.

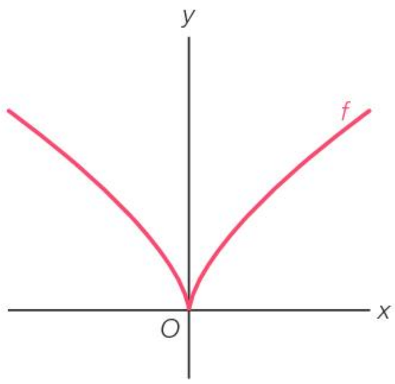
a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2$

b $g(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2$

d $k(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}}$

**35** Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.
De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $A$ met $x_A = \frac{1}{8}$.
De lijn $l$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $B$ met $x_B = 8$.
De lijnen $k$ en $l$ snijden elkaar in het punt $C$.
Bereken exact de coördinaten van $C$.



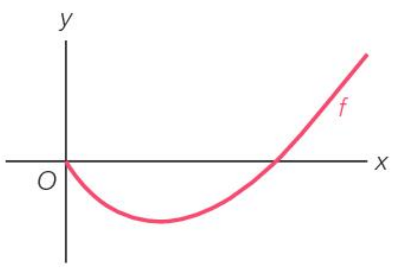

**figuur 6.8**

**36** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.

a Bereken exact het minimum van $f$.

b Stel algebraïsch de formule op van de lijn $k$ die de grafiek van $f$ raakt in de oorsprong.

c De lijn $l$ met richtingscoëfficiënt 3 raakt de grafiek van $f$ in het punt $A$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van $A$ en stel de formule op van $l$.




**figuur 6.9**

**A37** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{\sqrt{x}}$.

**a** De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $A$ met $x_A = 1$ en snijdt de $x$-as in het punt $B$.
Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OAB$.

**b** De $x$-coördinaat van de top van de grafiek is te schrijven als $\sqrt[3]{p}$.
Bereken $p$.

**A38** Een magneetzweeftrein trekt op. Gedurende de eerste negen seconden is de afgelegde afstand $s$ in meter te benaderen door de formule $s(t) = 10t\sqrt{t}$ met $t$ in seconden. Na negen seconden verandert de snelheid niet meer.

**a** Bereken exact de snelheid na acht seconden.

**b** Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 108 km/uur.

**c** Hoeveel meter legt de trein af in de eerste minuut?

**A39** Voor elke waarde van $p$ is de functie $f_p$ gegeven door $f_p(x) = (2x - p\sqrt{x})^2$.
Bereken exact voor welke $p$ de functie een maximum heeft voor $x = 2\frac{1}{4}$ en bereken dit maximum.

# Terugblik

### De afgeleide van $f(x) = x^n$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt voor elk getal $n$ van $\mathbb{R}$.

Dus bij $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ krijg je $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$ geeft $f'(x) = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$.

Bij $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$ krijg je $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} = x^{3\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ deel je eerst uit.

Je krijgt $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + x^{-1}$ geeft $h'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $k(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ gebruik je de quotiëntregel.

Je krijgt $k'(x) = \dfrac{(x^2+1) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $l(x) = \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ krijg je

$l(x) = \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{x^2+1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$l'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{3}{2x^{2\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{x^2-3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$.

### Raaklijnen en toppen

Bij de functie $f(x) = \dfrac{x^2+9}{2x}$ bereken je als volgt exact de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn richtingscoëfficiënt $-4$ heeft.

$f(x) = \dfrac{x^2+9}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}x^{-2} = \frac{1}{2} - \dfrac{9}{2x^2} = \dfrac{x^2-9}{2x^2}$

$f'(x) = -4$ geeft $\dfrac{x^2-9}{2x^2} = -4$

Hieruit volgt $x^2 - 9 = -8x^2$ en dit geeft $x = 1 \vee x = -1$.

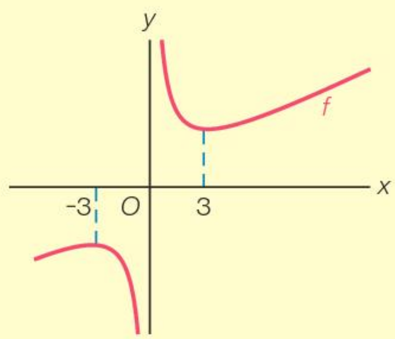
$f(-1) = -5$ en $f(1) = 5$, dus de punten zijn $(-1, -5)$ en $(1, 5)$.

Voor het exact berekenen van de extreme waarden stel je $f'(x) = 0$.

Je krijgt $\dfrac{x^2-9}{2x^2} = 0$ en dit geeft $x = 3 \vee x = -3$.

Zie de grafiek.

De extremen zijn max. is $f(-3) = -3$ en min. is $f(3) = 3$.



# 6.3 De kettingregel

**040** Gegeven zijn de functies $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - 5x$.
**a** Bereken $v(3)$ en $u(v(3))$.
**b** Bereken $u(v(4))$.

**041** Gegeven is de functie $f(x) = (3x^3 + 7)^2$.
Het functievoorschrift van $f$ is te noteren als $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^2$ en $v(x) = 3x^3 + 7$.
Noteer op dezelfde manier met functies $u$ en $v$.

**a** $f(x) = (3 - x^5)^6$
**b** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
**c** $f(x) = \dfrac{2}{(x + 8)^3}$

## Theorie A De afgeleide van een samengestelde functie

De functie $f(x) = (x^2 - 5x)^4$ is een voorbeeld van een **samengestelde functie**. De functie is samengesteld uit de **schakels** $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - 5x$.
Een functie die geschreven is als een ketting van schakels heet een **kettingfunctie**.
Voor het differentiëren van de functie $f$ gebruik je de **kettingregel**.

**Kettingregel**
$f(x) = u(v(x))$ **geeft** $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Bij $f(x) = (x^2 - 5x)^4$ krijg je $f'(x) = \underbrace{4(x^2 - 5x)^3}_{u'(v(x))} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{v'(x)}$.

Bij het differentiëren van $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ krijg je
$f(x) = \sqrt{3x + 1} = (3x + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \dfrac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$.

Omdat van $g(x) = \sqrt{x}$ de afgeleide is $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,
mag je in één keer opschrijven $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft
$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

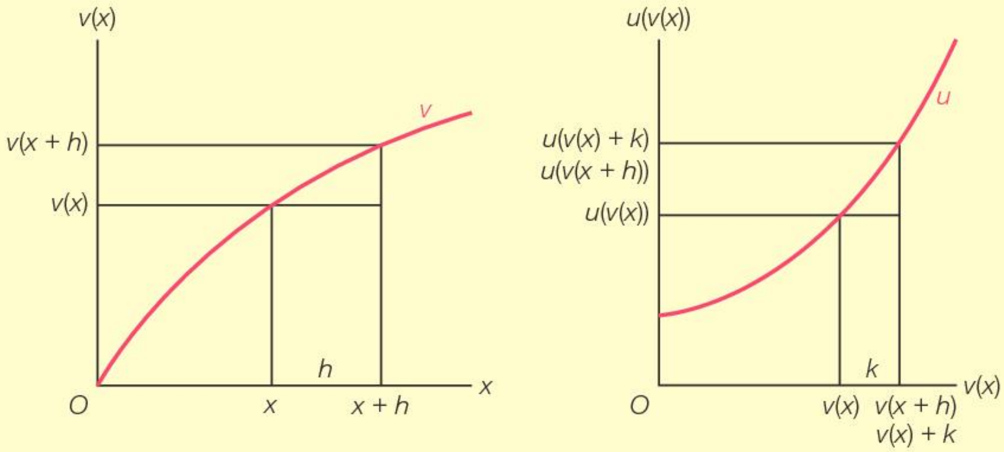
Het bewijs van de kettingregel gaat als volgt.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Stel $v(x+h) - v(x) = k$, dus $v(x+h) = v(x) + k$. Hieruit volgt dat $k$ nadert naar 0, als $h$ nadert naar 0 (zie figuur 6.10). Dus

$$f'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{u(v(x)+k) - u(v(x))}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$




**figuur 6.10**

### Voorbeeld

Differentieer.

**a** $f(x) = \dfrac{5}{(2x^3 - 7x)^4}$

**b** $g(x) = 2x + \sqrt{3x^2 + 4}$

**c** $h(x) = (4x+1)^3 \cdot \sqrt{4x+1}$

*Uitwerking*

$f(x) = u(v(x))$ met
$v(x) = 2x^3 - 7x$ en
$u(v) = 5v^{-4}$.

**a** $f(x) = \dfrac{5}{(2x^3 - 7x)^4} = 5(2x^3 - 7x)^{-4}$ geeft

$f'(x) = -20(2x^3 - 7x)^{-5} \cdot (6x^2 - 7) = -\dfrac{20(6x^2 - 7)}{(2x^3 - 7x)^5}$

**b** $g(x) = 2x + \sqrt{3x^2 + 4}$ geeft $g'(x) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+4}} \cdot 6x = 2 + \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$

**c** $h(x) = (4x+1)^3 \cdot \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{3\frac{1}{2}}$ geeft

$h'(x) = 3\frac{1}{2}(4x+1)^{2\frac{1}{2}} \cdot 4 = 14(4x+1)^2 \cdot \sqrt{4x+1}$

**42** Bereken de afgeleide.

**a** $f(x) = (4x + 3)^3$

**b** $g(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$

**c** $h(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$

**d** $j(x) = (4x^2 - 3)^4$

**e** $k(x) = 5x - \dfrac{4}{(3x + 2)^3}$

**f** $l(x) = \sqrt{4x + 1}$

**43** Differentieer.

**a** $f(x) = -2(2x + 1)^4$

**b** $g(x) = \dfrac{1}{(3x - 2)^2}$

**c** $h(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$

**d** $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - 1}}$

**e** $k(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}$

**f** $l(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

**A44** Bereken de afgeleide.

**a** $f(x) = 4(x^3 + 7x - 2)^2$

**b** $g(x) = -\dfrac{6}{(x^2 + 3x)^3}$

**c** $h(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$

**d** $j(x) = \dfrac{1}{(4 - x)\sqrt{4 - x}}$

**e** $k(x) = 5\sqrt{2x^4 + x^2} + 4x^2$

**f** $l(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}$

**45** Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2x)^3$.

**a** Schets de grafiek van $f$.

**b** Bereken exact de $x$-coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.

**c** De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $A$ met $x_A = 3$ en snijdt de $y$-as in het punt $B$.
Bereken exact de $y$-coördinaat van $B$.

**46** Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$.

**a** Bereken algebraïsch het bereik van $f$.

**b** De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ en is evenwijdig met de lijn $l$: $y = -2x$.
Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van $k$.

**47** Gegeven is de functie $f$ van opgave 46 en de functie $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 15$.
Het functievoorschrift van $g$ is ook te schrijven in de vorm $g(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^2 + ax + b$.

**a** Bereken $a$ en $b$.

**b** Los exact op $f(x) = g(x)$.

**A48** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)^3 + 2$ en $g(x) = -\frac{1}{4}(3x - 10)^4 + 2\frac{1}{2}$. Het punt $A(3, 2\frac{1}{4})$ ligt zowel op de grafiek van $f$ als op de grafiek van $g$.

**a** Toon dit aan.

**b** Emma beweert dat de grafieken van $f$ en $g$ in het punt $A$ dezelfde raaklijn hebben.
Onderzoek langs algebraïsche weg of Emma gelijk heeft.

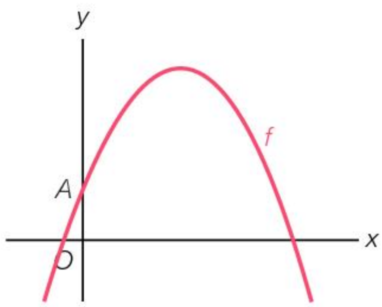
**c** Er zijn twee punten op de grafiek van $f$ waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $13\frac{1}{2}$.
Bereken exact de coördinaten van die punten.

**A49** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - x^2 + 5x$.

**a** Onderzoek met de afgeleide of $f$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{7}$.

**b** De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ en is evenwijdig met de lijn $l$: $y = 5x - 2$.
Stel algebraïsch de formule op van $k$.

**c** De grafiek van $f$ snijdt de $y$-as in het punt $A$. De lijn $m$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $B$ met $x_B = 4$ en snijdt de $y$-as in het punt $C$.
Bereken exact de afstand tussen $A$ en $C$.

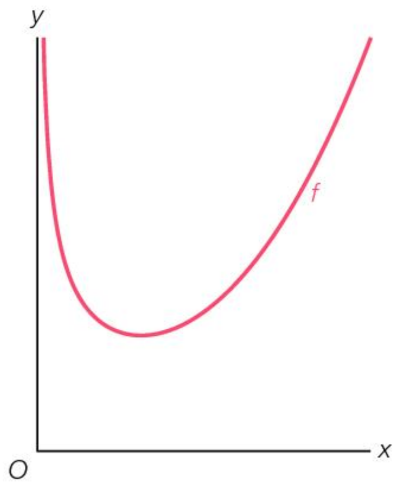


**figuur 6.11**

**A50** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}}$.

**a** De $y$-coördinaat van de top van de grafiek van $f$ is te schrijven in de vorm $\dfrac{a}{\sqrt[b]{c}}$.
Bereken exact mogelijke waarden van $a$, $b$ en $c$.

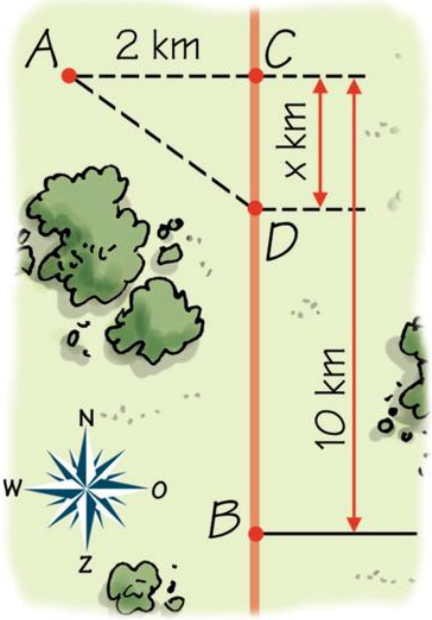
**b** Op de grafiek van $f$ wordt de translatie $(0, d)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g$.
De lijn $k$ gaat door de oorsprong en raakt de grafiek van $g$ in het punt $A$ met $x_A = 1$.
Bereken $d$ algebraïsch.



**figuur 6.12**

**A51** Bij een autorally leggen de deelnemers een parcours af dat gedeeltelijk over een terrein zonder wegen en gedeeltelijk over onverharde wegen gaat. In figuur 6.13 zie je een gedeelte van het parcours. De deelnemers rijden van $A$ naar $B$. Punt $B$ ligt 2 km oostelijk en 10 km zuidelijk van $A$. Tussen $C$ en $B$ ligt een onverharde weg, waar met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur wordt gereden. Ten westen van deze onverharde weg is ruw terrein, waar de gemiddelde snelheid 80 km/uur is.
Een deelnemer kan rechtstreeks van $A$ naar $B$, maar bijvoorbeeld ook via $C$ naar $B$ gaan. In het laatste geval is hij ongeveer 9 seconden eerder in $B$ dan in het geval hij rechtstreeks van $A$ naar $B$ rijdt.

**a** Toon dit aan.



**figuur 6.13**

Het is ook mogelijk dat een deelnemer vanaf $A$ schuin doorsteekt naar de onverharde weg tussen $C$ en $B$ en daarna zijn weg vervolgt over de onverharde weg richting $B$.
Stel hij komt daarbij $x$ km ten zuiden van $C$ uit.
Dan geldt $t = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01x$. Hierin is $t$ de tijd in uren die de deelnemer over de afstand tussen $A$ en $B$ doet.

**b** Toon aan dat deze formule juist is.

**c** Bereken exact voor welke waarde van $x$ de tijd $t$ voor de deelnemer minimaal is. Hoeveel seconden scheelt het met de situatie dat hij via $C$ naar $B$ gaat?

**A52** Bereken algebraïsch voor welke waarde van $a$ de functie $f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ een extreme waarde heeft voor $x = 3$.

**O53** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$.
Licht toe dat je voor het berekenen van de afgeleide de productregel én de kettingregel nodig hebt.

## Theorie B De kettingregel gecombineerd met de productregel of de quotiëntregel

De functie $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$ is het product van de factoren $x$ en $\sqrt{2x + 1}$.
Daarom gebruik je bij het differentiëren de productregel:
$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x + 1} + x \cdot [\sqrt{2x + 1}]'$.

Om de afgeleide van $\sqrt{2x + 1}$ te berekenen, heb je de kettingregel nodig.

De functie $g(x) = \dfrac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$ is het quotiënt van $x + 6$ en $\sqrt{8x+9}$.

Daarom gebruik je bij het differentiëren de quotiëntregel:

$$g'(x) = \frac{\sqrt{8x+9} \cdot [x+6]' - (x+6) \cdot [\sqrt{8x+9}]'}{(\sqrt{8x+9})^2}.$$

Om de afgeleide van $\sqrt{8x+9}$ te berekenen, heb je de kettingregel nodig.

**54**

**a** De afgeleide van $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ is $f'(x) = \sqrt{2x+1} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$.
Licht dit toe en toon aan dat het functievoorschrift van $f'$ te herleiden is tot $f'(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$.

**b** De afgeleide van $g(x) = \dfrac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$ is $g'(x) = \dfrac{\sqrt{8x+9} - \dfrac{4(x+6)}{\sqrt{8x+9}}}{8x+9}$.
Licht dit toe en toon aan dat het functievoorschrift van $g'$ te herleiden is tot $g'(x) = \dfrac{4x-15}{(8x+9)\sqrt{8x+9}}$.

**55** Differentieer. Herleid zo mogelijk de formule van de afgeleide.

**a** $f(x) = x\sqrt{3x+4}$ **b** $g(x) = x(3x+1)^3$ **c** $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$

**E56** Gegeven is nogmaals de functie $f(x) = x\sqrt{3x+4}$ van opgave 55.
Harm differentieert *f* als volgt: $f(x) = x\sqrt{3x+4} = \sqrt{3x^3+4x^2}$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^3+4x^2}} \cdot (9x^2+8x) = \frac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}} = \frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}.$$

Welke drie fouten maakt Harm?

**57** De afgeleide van $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{3x+1}$ is te schrijven als $f'(x) = \dfrac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}}$.

**a** Bewijs dit.

**b** De lijn $k$ gaat door het randpunt van de grafiek van *f* en is evenwijdig met de lijn $l$ die de grafiek van *f* raakt in de oorsprong.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van $k$.

**c** De lijn $m$ met richtingscoëfficiënt $1\frac{3}{8}$ raakt de grafiek van *f* in het punt $A$.
Bereken exact de coördinaten van $A$.

**58** 

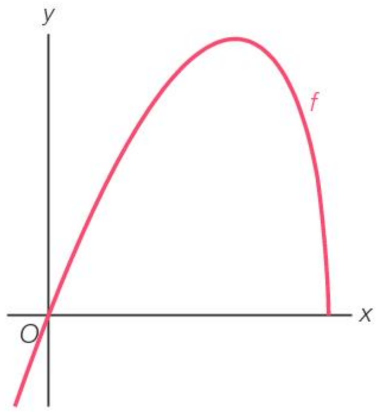
Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{8 - 2x}$.
In figuur 6.14 zie je de grafiek van $f$.

**a** Bereken het domein van $f$.

**b** Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{8 - 3x}{\sqrt{8 - 2x}}$.

**c** Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van $f$ en geef het bereik.

**d** Op de grafiek van $f$ ligt het punt $A$ waarin de raaklijn richtingscoëfficiënt 1 heeft.
Bereken exact de coördinaten van $A$.



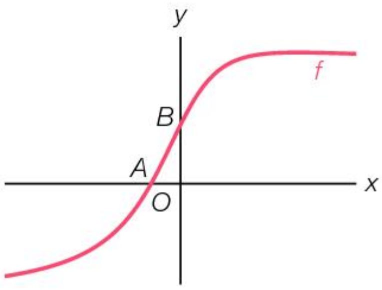
**figuur 6.14**

**A59**

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}$.
De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in het punt $A$ en de $y$-as in het punt $B$. Zie de grafiek hiernaast.

**a** Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek.

**b** De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in $A$ en de lijn $l$ raakt de grafiek van $f$ in $B$.
Onderzoek algebraïsch welke van de volgende twee beweringen waar is.
I De lijn $k$ gaat door $B$.
II De lijn $l$ gaat door $A$.



**figuur 6.15**

**A60**

Gegeven is de functie $f(x) = 2x\sqrt{9 - 2x} - 3$.

**a** Bereken exact het maximum van $f$.

**b** Bereken het domein en geef het bereik van $f$.

**c** Het punt $A$ ligt op de grafiek van $f$. De raaklijn in $A$ is evenwijdig met de lijn $y = 1\frac{1}{2}x$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van $A$.

**A61**

Voor elke waarde van $p$ is de functie $f_p$ gegeven door $f_p(x) = \dfrac{px}{\sqrt{x^2 + 9}}$.
Bereken voor welke $p$ de lijn $y = x$ de grafiek van $f_p$ raakt in de oorsprong.

# Terugblik

### De kettingregel

Een functie die geschreven is als een ketting van functies heet een kettingfunctie of samengestelde functie.
Zo is de functie $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ te schrijven als $f(x)=u(v(x))$ met de schakels $u=\sqrt{v}$ en $v=x^2+x$.
Bij het differentiëren van kettingfuncties gebruik je de kettingregel:
$f(x)=u(v(x))$ geeft $f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$.
Deze regel zegt dat de afgeleide van een kettingfunctie het product is van de afgeleiden van de afzonderlijke schakels.

Bij $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ krijg je $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

### De productregel en de kettingregel

Bij het differentiëren van $h(x)=x\sqrt{x^2+x}$ gebruik je de productregel.
In de berekening komt $[\sqrt{x^2+x}]'$ tevoorschijn en dit bereken je met de kettingregel.
Je krijgt

$$h'(x)=1\cdot\sqrt{x^2+x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1)=\sqrt{x^2+x}+\frac{x(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\frac{2(x^2+x)+2x^2+x}{2\sqrt{x^2+x}}=\frac{4x^2+3x}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

### De quotiëntregel en de kettingregel

Bij het differentiëren van de functie $k(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ gebruik je de quotiëntregel.
In de berekening komt $[\sqrt{x^2+x}]'$ tevoorschijn en dit bereken je met de kettingregel.
Je krijgt

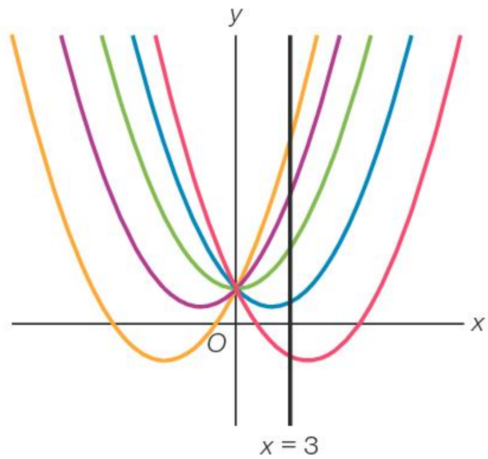
$$k'(x)=\frac{(x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1)-\sqrt{x^2+x}\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)\cdot\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-\sqrt{x^2+x}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)(2x+1)-2(x^2+x)}{2(x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+x}}=\frac{2x^2+x+2x+1-2x^2-2x}{2(x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\frac{x+1}{2(x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+x}}=\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x^2+x}}.$$

# 6.4 Functies met parameters

**062** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 2$.
In de figuur hiernaast zijn de grafieken getekend voor $p = -2$, $p = -1$, $p = 0$, $p = 1$ en $p = 2$. Ook is de lijn $x = 3$ getekend.
We vragen ons af voor welke waarde van $p$ de lijn $k$ met rc $= 2\frac{1}{2}$ de grafiek van $f_p$ raakt in het punt $A$ met $x_A = 3$.
Licht toe dat geldt $f_p'(3) = 2\frac{1}{2}$ en bereken $p$.




**figuur 6.16**

## Theorie A Raaklijnproblemen bij functies met een parameter

In opgave 62 raakt de lijn $k$ met richtingscoëfficiënt $2\frac{1}{2}$ de grafiek van $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 2$ in het punt $A$ met $x_A = 3$. Om $p$ te berekenen los je de vergelijking $f_p'(x_A) = \text{rc}_k$, dus $f_p'(3) = 2\frac{1}{2}$ op.

In opgave 63 heb je te maken met de parameters $p$ en $q$.

**63** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = (x^2 + p) \cdot \sqrt{x}$.
De lijn $k$: $y = 18x + q$ raakt de grafiek van $f_p$ in het punt $A$ met $x_A = 4$.

Er geldt $f_p'(x) = \dfrac{5x^2 + p}{2\sqrt{x}}$.

**a** Bewijs dit.
**b** Gebruik $f_p'(4) = \text{rc}_k$ om $p$ te berekenen.
**c** Bereken de coördinaten van $A$ en vervolgens de waarde van $q$.

**64** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \sqrt{2x^2 + p}$.
De lijn $k$: $y = \frac{2}{3}x + q$ raakt de grafiek van $f_p$ in het punt $A$ met $x_A = 1$.
Bereken exact $p$ en $q$.

**65** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2$.
**a** Voor welke $p$ heeft de functie $f_p$ een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$?
**b** De lijn $k$: $y = 5x + q$ raakt de grafiek van $f_p$ in het punt $A$ met $x_A = 1$.
Bereken $p$ en $q$ algebraïsch.

**A66** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{4x + p}{x^2 + 1}$.

**a** De lijn $k$: $y = ax + 4$ raakt de grafiek van $f_p$ in het snijpunt van de grafiek met de $y$-as.
Bereken $a$ en $p$.

**b** De lijn $l$ met richtingscoëfficiënt $-1$ raakt de grafiek van $f_p$ in het punt $A$ met $x_A = -1$.
Stel algebraïsch de formule op van $l$.

**c** De functie $f_p$ heeft een extreme waarde voor $x = 2$.
Bereken exact $p$ en de andere extreme waarde.

**A67** Voor elke waarde van $p$ is de functie $f_p$ gegeven door $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$.

**a** Toon aan dat $f_p$ voor elke $p$ twee extreme waarden heeft.

**b** De functie $f_p$ heeft een extreme waarde voor $x = 3$.
Bereken exact $p$ en de andere extreme waarde.

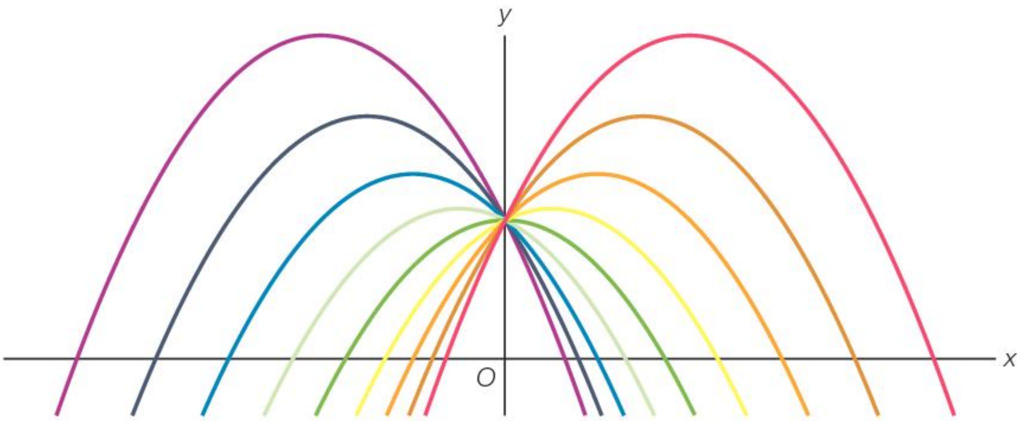
**c** De lijn $l$: $y = -x + q$ raakt de grafiek van $f_p$ in het punt $B$ met $x_B = -2$.
Bereken exact $p$ en $q$.

**E68** Voor elke $p$ en $q$ is de functie $f_{p,q}$ gegeven door $f_{p,q}(x) = \dfrac{x + p}{\sqrt{x^2 + q}}$.

De lijn $k$ is evenwijdig met de lijn $l$: $y = -\frac{1}{9}x$ en raakt de grafiek van $f_{p,q}$ in het punt $A(2, 2)$.
Bereken $p$ en $q$.

**O69** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + px + 3$.

Toon aan dat uit $f_p'(x) = 0$ volgt $p = \frac{1}{2}x$.



## Theorie B Kromme door toppen

Om een formule op te stellen van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = x^3 + px^2$ liggen, kun je $x_{top}$ uitdrukken in $p$. Daartoe los je de vergelijking $f_p'(x) = 0$ op.
Je krijgt
$f_p(x) = x^3 + px^2$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px$

$f_p'(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2px = 0$

$$\begin{aligned} x(3x + 2p) &= 0 \\ x = 0 \vee 3x + 2p &= 0 \\ x = 0 \vee 3x &= -2p \\ x = 0 \vee x &= -\tfrac{2}{3}p \end{aligned}$$

$x = 0$ geeft het punt (0, 0).

$$\left.\begin{array}{l} x = -\tfrac{2}{3}p \text{ geeft } p = -1\tfrac{1}{2}x \\ y = x^3 + px^2 \end{array}\right\} y = x^3 - 1\tfrac{1}{2}x \cdot x^2 = x^3 - 1\tfrac{1}{2}x^3 = -\tfrac{1}{2}x^3$$

Ook het punt (0, 0) voldoet aan $y = -\tfrac{1}{2}x^3$.

Dus de formule van de kromme is $y = -\tfrac{1}{2}x^3$.

Merk op dat je bij het oplossen van de vergelijking $f_p'(x) = 0$ mogelijk ook $x$-coördinaten krijgt van punten waarin de raaklijn wel horizontaal is, maar die geen top zijn. Op de gevonden kromme liggen dus alle toppen en mogelijk ook nog een of meer buigpunten met horizontale raaklijn. Dat laatste doet echter niet ter zake.

In plaats van de vergelijking $f_p'(x) = 0$ naar $x$ op te lossen, kun je deze vergelijking ook naar $p$ oplossen, oftewel $p$ vrijmaken. Je krijgt dan
$3x^2 + 2px = 0$
$2px = -3x^2$
$p = \dfrac{-3x^2}{2x}$
$p = -1\tfrac{1}{2}x$ mits $x \neq 0$.

In het voorbeeld is deze aanpak handiger. Dus daar wordt $p$ vrijgemaakt bij de vergelijking $f_p'(x) = 0$.

## Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x + 3$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van $f_p$ liggen.

*Uitwerking*

$f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x + 3$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px + 2$

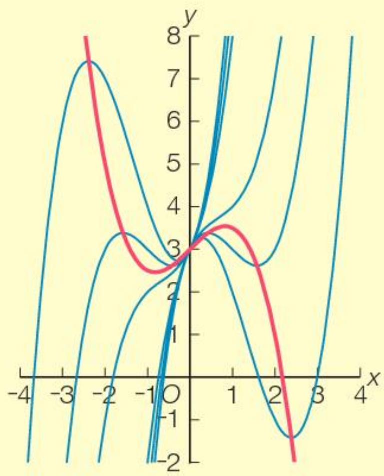
$f_p'(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2px + 2 = 0$

$$2px = -3x^2 - 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \dfrac{-3x^2 - 2}{2x} \\ y = x^3 + px^2 + 2x + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = x^3 + \dfrac{-3x^2 - 2}{2x} \cdot x^2 + 2x + 3 \\ y = x^3 + \frac{1}{2}x(-3x^2 - 2) + 2x + 3 \\ y = x^3 - 1\frac{1}{2}x^3 - x + 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3 \end{array}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$.

In de figuur hiernaast is voor enkele waarden van $p$ de grafiek van $f_p$ van het voorbeeld getekend. Bovendien is de kromme $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$ getekend. Je ziet dat alle toppen van de getekende grafieken op de kromme $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$ liggen.




**figuur 6.17**

**R70** In de theorie op de vorige bladzijde staat dat het niet ter zake doet dat er op de gevonden kromme eventueel ook punten liggen die geen top zijn.

**a** Licht toe waarom dit niet ter zake doet.

Zie het voorbeeld hierboven. De kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{2}x^3 + x + 3$. Op deze kromme ligt het punt (0, 3). Het punt (0, 3) is niet een top van een van de grafieken van $f_p$.

**b** Toon dit aan.

**c** Licht toe dat dat dit niet in tegenspraak is met de laatste zin in het voorbeeld.

**71** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van $f_p$ liggen.

**72** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{x+p}{x^2+4}$.

**a** De functie $f_p$ heeft een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken exact $p$ en de andere extreme waarde.

**b** Bewijs dat alle toppen van de grafieken van $f_p$ op de kromme $y = \dfrac{1}{2x}$ liggen.

**A73** Voor elke $p > 0$ is gegeven de functie $f_p(x) = (p - x^2) \cdot \sqrt{x}$.

**a** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van $f_p$ liggen.

**b** Bereken exact voor welke $p$ de top van de grafiek van $f_p$ op de lijn $y = 8$ ligt.

**O74** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$ en $g(x) = -x^2 + 4x$.
Het punt $A(1, 3)$ ligt zowel op de grafiek van $f$ als op de grafiek van $g$.

**a** Toon dit aan.

De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in $A$ en de lijn $l$ raakt de grafiek van $g$ in $A$.

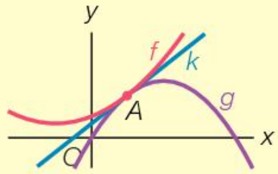
**b** Stel langs algebraïsche weg formules op van $k$ en $l$.

**c** Wat voor bijzonder punt is het punt $A$?

## Theorie C Rakende grafieken

In opgave 74 heb je gezien dat de raaklijn in $A$ van de grafiek van $f$ samenvalt met de raaklijn in $A$ van de grafiek van $g$. De grafieken hebben in $A$ een gemeenschappelijke raaklijn. De grafieken van $f$ en $g$ raken elkaar in $A$.

**De grafieken van $f$ en $g$ raken elkaar in het punt $A$ als de raaklijn in $A$ van de grafiek van $f$ samenvalt met de raaklijn in $A$ van de grafiek van $g$.**




In het raakpunt $A$ geldt dus niet alleen $f(x_A) = g(x_A)$, maar ook $f'(x_A) = g'(x_A)$.

**De grafieken van $f$ en $g$ raken elkaar in het punt $A$ als de $x$-coördinaat van $A$ voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.**

## Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ en $g(x) = -x^2 + 9x - 13$.
Bewijs dat de grafieken van $f$ en $g$ elkaar raken en bereken de coördinaten van het raakpunt.

*Uitwerking*

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x$

$g(x) = -x^2 + 9x - 13$ geeft $g'(x) = -2x + 9$

$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$

$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5 = -x^2 + 9x - 13 \wedge x^2 - 2x = -2x + 9$

$\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0 \wedge x^2 = 9$

$x^2 = 9$ geeft $x = 3 \vee x = -3$

Substitutie van $x = -3$ in $\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0$
geeft $\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - 9 \cdot -3 + 18 = 0$
$-9 + 27 + 18 = 0$ klopt niet.

Substitutie van $x = 3$ in $\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0$
geeft $\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 9 \cdot 3 + 18 = 0$
$9 - 27 + 18 = 0$ klopt, dus de grafieken raken elkaar voor $x = 3$.

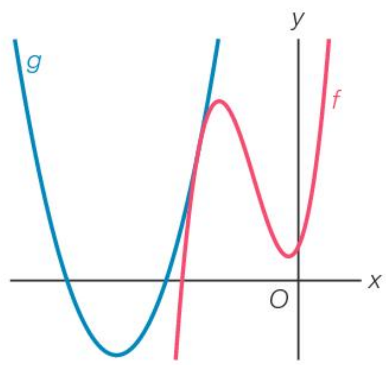
$f(3) = 5$, dus het raakpunt is $(3, 5)$.

**R75** Zie het voorbeeld.
Oplossen van $f'(x) = g'(x)$ geeft $x = 3 \vee x = -3$, maar $x = -3$ voldoet niet aan $f(x) = g(x)$.
Wat betekent dit voor de grafieken van $f$ en $g$ voor $x = -3$?

**76** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ en $g(x) = x^2 + 11x + 28$.

**a** Bewijs dat de grafieken van $f$ en $g$ elkaar raken en bereken de coördinaten van het raakpunt.

**b** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de gemeenschappelijke raaklijn in het raakpunt.




**figuur 6.18**

**77** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{2x}$ en $g_p(x) = x^2 + p$.

**a** Onderzoek langs algebraïsche weg of de grafieken van $f$ en $g_1$ elkaar raken.

**b** Bereken exact voor welke $p$ de grafieken van $f$ en $g_p$ elkaar raken.

**A78** a Bewijs dat de grafieken van $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}$ elkaar raken en bereken de coördinaten van het raakpunt.
b Bereken exact de waarden van $p$ waarvoor de grafieken van $h(x) = -x^2 + 8x - 12$ en $k_p(x) = x^2 + px$ elkaar raken.

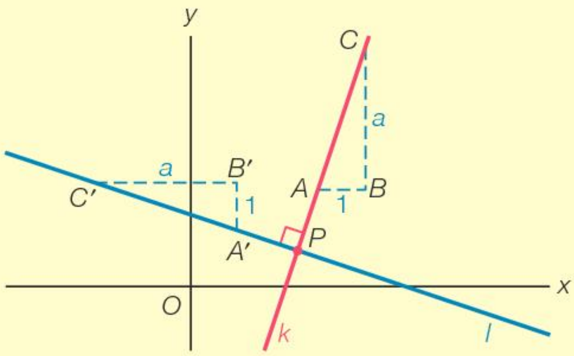
**E79** Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \dfrac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ en $g(x) = -1\frac{3}{8}x^2 + 2\frac{7}{8}x$.
De grafieken van $f_{p,q}$ en $g$ raken elkaar in het punt $A$ met $x_A = 1$.
Bereken $p$ en $q$.

**080** Gegeven zijn de lijnen $k$: $y = 2x - 2$ en $l$: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
a Teken de lijnen in één figuur.
b Bram beweert dat de lijnen $k$ en $l$ loodrecht op elkaar staan. Ben je het daarmee eens?
c De lijn $m$ gaat door het punt $A(4, 0)$ en staat loodrecht op $k$. Stel van $m$ de formule op.
d Stel de formule op van de lijn $n$ die door het punt $B(1, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $p$: $y = \frac{1}{4}x + 5$.

## Theorie D Elkaar loodrecht snijdende grafieken

In opgave 80 heb je gezien dat de lijnen $k$ met $\text{rc}_k = 2$ en $l$ met $\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$ loodrecht op elkaar staan.
Ook de lijnen $p$ met $\text{rc}_p = \frac{1}{4}$ en $n$ met $\text{rc}_n = -4$ staan loodrecht op elkaar.

In het algemeen staan de lijnen $k$ en $l$ met $\text{rc}_k = a$ en $\text{rc}_l = -\dfrac{1}{a}$ loodrecht op elkaar.
Dus als $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen $k$ en $l$ loodrecht op elkaar.
In het geval $\text{rc}_k \neq 0$ en $\text{rc}_l \neq 0$ geldt:
als $k \perp l$, dan $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$.

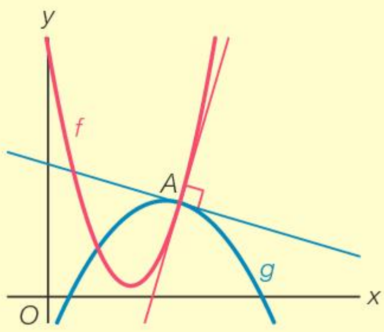


**figuur 6.19** $k \perp l$ omdat $\text{rc}_k = a$ en $\text{rc}_l = -\dfrac{1}{a}$.

**Voor de lijnen $k$ en $l$ met $\text{rc}_k \neq 0$ en $\text{rc}_l \neq 0$ geldt:**
**$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.**

De grafieken van de functies $f$ en $g$ snijden elkaar loodrecht in het punt $A$ als in dat punt de raaklijnen van de grafieken loodrecht op elkaar staan. In het punt $A$ geldt dus niet alleen $f(x_A) = g(x_A)$, maar ook $f'(x_A) \cdot g'(x_A) = -1$. Hiermee is de $x$-coördinaat van het punt $A$ te berekenen.

**De grafieken van de functies $f$ en $g$ snijden elkaar loodrecht in het punt $A$ als de $x$-coördinaat van $A$ voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$.**




### Voorbeeld

De grafieken van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = \dfrac{p}{x}$ snijden elkaar loodrecht.

Bereken exact de waarde van $p$ en de coördinaten van het punt waarin de grafieken elkaar loodrecht snijden.

*Uitwerking*

$f(x) = 2\sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$g_p(x) = \dfrac{p}{x} = px^{-1}$ geeft $g'(x) = -px^{-2} = -\dfrac{p}{x^2}$

$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p{}'(x) = -1$

$2\sqrt{x} = \dfrac{p}{x} \wedge \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{-p}{x^2} = -1$

$p = 2x\sqrt{x} \wedge \dfrac{p}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$

$p = 2x\sqrt{x}$ substitueren in $\dfrac{p}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$ geeft $\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$

$$\dfrac{2}{x} = 1$$

$$x = 2$$

Je kunt ook twee keer $p$ vrijmaken. Dit geeft de vergelijking $2x\sqrt{x} = x^2 \cdot \sqrt{x}$.

$x = 2$ geeft $p = 4\sqrt{2}$ en $f(2) = 2\sqrt{2}$

Dus de grafieken snijden elkaar loodrecht voor $p = 4\sqrt{2}$ in het punt $(2, 2\sqrt{2})$.

**81**

**a** Bewijs dat de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10$ elkaar loodrecht snijden.

**b** De grafieken van $h_p(x) = p\sqrt{x}$ en $k(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$ snijden elkaar loodrecht.
Bereken exact de waarde van $p$ en de coördinaten van het punt waarin de grafieken elkaar loodrecht snijden.

**82** 

**a** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn $k$ die de grafiek van $f$ loodrecht snijdt in het punt $A(5, 5)$.

**b** De lijn $l$: $y = -5x + p$ snijdt de grafiek van $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ loodrecht.
Bereken $p$ algebraïsch.

**A83** 

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - x$ en $g_p(x) = \dfrac{p}{x}$.

**a** De grafieken van $f$ en $g_p$ raken elkaar in het punt $A$.
Bereken exact de waarde van $p$ en de coördinaten van $A$.

**b** De grafieken van $f$ en $g_p$ snijden elkaar loodrecht in het punt $B$.
Bereken exact de waarde van $p$ en de coördinaten van $B$.

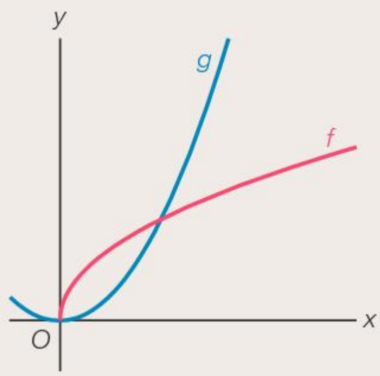
**E84** 

Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \dfrac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ en $g(x) = x^2 - 3x - 1\frac{1}{2}$.
De grafieken van $f_{p,q}$ en $g$ snijden elkaar loodrecht in het punt $A$ met $x_A = 4$.
Bereken $p$ en $q$.

INFORMATIEF

## Verticale raaklijnen

De grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ heeft in het randpunt $(0, 0)$ een verticale raaklijn. De vergelijking van de raaklijn is $x = 0$ en deze raaklijn heeft geen richtingscoëfficiënt.
De grafiek van $g(x) = x^2$ heeft in $(0, 0)$ een horizontale raaklijn. De grafieken van $f$ en $g$ staan in $(0, 0)$ dus loodrecht op elkaar.




Uit $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ volgt $f'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{0}}$ en dus bestaat $f'(0)$ niet. Daarom geldt hier niet $f'(0) \cdot g'(0) = -1$.
Bij loodrecht snijden waarbij één van de raaklijnen verticaal is, kun je dus niet de regel $f'(x) \cdot g'(x) = -1$ gebruiken.

# Terugblik

### Raaklijnproblemen bij functies met een parameter

Raakt de lijn $k$ met $\text{rc}_k = -2$ de grafiek van $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ in het punt $A$ met $x_A = 4$, dan gebruik je $f_p'(4) = -2$ om de formule van $k$ op te stellen.

$f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ geeft $f_p'(x) = -x^2 + 3x + p$

$f_p'(4) = -2$ geeft $-4^2 + 3 \cdot 4 + p = -2$, dus $p = 2$.

$x_A = 4$ invullen bij $f_2(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$ geeft het raakpunt $A(4, 5\frac{2}{3})$.

Het punt $A$ ligt ook op $k$: $y = -2x + b$. Hieruit volgt $b = 13\frac{2}{3}$, dus $k$: $y = -2x + 13\frac{2}{3}$.

### Kromme door toppen

De toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ liggen op een kromme. De formule van deze kromme krijg je door $p$ met behulp van $f_p'(x) = 0$ uit te drukken in $x$ en dit in te vullen bij $y = f_p(x)$.

$f_p'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 3x + p = 0$, dus $p = x^2 - 3x$.

$p = x^2 - 3x$ en $y = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + px - 5$ geeft

$y = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + (x^2 - 3x) \cdot x - 5 = -\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + x^3 - 3x^2 - 5 = \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 5.$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is
$y = \frac{2}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 5$.

### Raken en loodrecht snijden

De grafieken van $f$ en $g$ raken elkaar in het punt $A$ als de $x$-coördinaat van $A$ voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.
De grafieken van $f$ en $g$ snijden elkaar loodrecht in het punt $A$ als de $x$-coördinaat van $A$ voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$.

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ en $g(x) = x^2 + 3x - 9$.
Om te bewijzen dat de grafieken van $f$ en $g$ elkaar raken, los je het stelsel $\frac{1}{3}x^3 = x^2 + 3x - 9 \wedge x^2 = 2x + 3$ op.
Uit $x^2 = 2x + 3$ volgt $x = -1 \vee x = 3$.
Omdat $f(-1) = -\frac{1}{3}$ en $g(-1) = -11$ geldt niet $f(-1) = g(-1)$.
Omdat $f(3) = 9$ en $g(3) = 9$ geldt $f(3) = g(3)$.
Dus de grafieken raken elkaar in het punt $(3, 9)$.

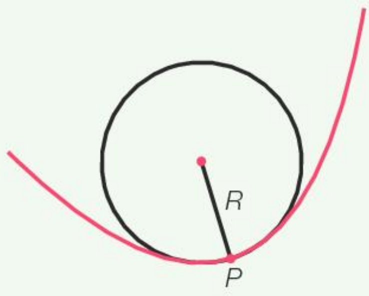
Om te onderzoeken of de grafieken van $f$ en $g$ elkaar loodrecht snijden in het punt $A$ met $x_A = -3$ ga je na of geldt $f(-3) = g(-3) \wedge f'(-3) \cdot g'(-3) = -1$.
Omdat $f(-3) = -9$ en $g(-3) = -9$ geldt $f(-3) = g(-3)$.
Omdat $f'(-3) = 9$ en $g'(-3) = -3$ geldt $f'(-3) \cdot g'(-3) = 9 \cdot -3 = -27$.
Dus de grafieken snijden elkaar wel in het punt $(-3, -9)$, maar niet loodrecht.

# Eindopdracht Kromming en kromtestraal

Bij het ontwerp van bochten in snelwegen, spoorwegen en kanalen zijn de begrippen kromming en kromtestraal van belang. We geven de kromming aan met de letter $k$ en de kromtestraal met de letter $R$.

Er geldt $k = \dfrac{1}{R}$.

De kromtestraal in een punt $P$ van een kromme is de straal van de cirkel die in $P$ zo goed mogelijk aansluit bij de kromme.
Zie de figuur hiernaast.
In deze opdracht ga je rekenen aan kromming en kromtestraal bij grafieken van functies $y = f(x)$.



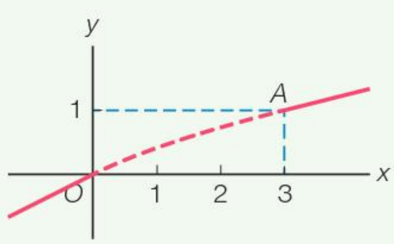

Er geldt $k = \dfrac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{1\frac{1}{2}}}$.

We geven een voorbeeld bij de functie $f(x) = x^3$. Er geldt dat $f'(x) = 3x^2$ en $f''(x) = 6x$. De kromming van de grafiek in het punt $(1, 1)$ is

$k = \dfrac{|f''(1)|}{(1 + (f'(1))^2)^{1\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{(1 + 3^2)^{1\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{10^{1\frac{1}{2}}} \approx 0{,}190$. De kromtestraal is $R = \dfrac{10^{1\frac{1}{2}}}{6} \approx 5{,}27$.

- Bereken bij de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ de kromming van de grafiek in de punten $(2, 8)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- Er zijn bij de functie $f(x) = x^3$ vier punten op de grafiek waar de kromming gelijk is aan 1.
  Bereken de $x$-coördinaten van deze punten. Rond af op twee decimalen.
- Bereken de maximale kromming van de grafiek van $f(x) = x^3$. Rond af op drie decimalen.

Voor een spoorweg moet in ieder punt de kromtestraal groter zijn dan 5 km.
We bekijken de volgende situatie. Zie de figuur hiernaast met een assenstelsel waarbij de eenheid 1 km is.
Tussen de punten $O$ en $A(3, 1)$ ontbreekt een deel spoorweg. In $O$ is rc $= \frac{1}{2}$ en in $A$ is rc $= \frac{1}{4}$.
Tussen $O$ en $A$ moet een ontwerp komen voor het ontbrekende deel.




Een ingenieur stelt voor dit stuk aan te leggen volgens een kromme die te beschrijven is met de formule $y = \sqrt{x + 1} - 1$.
- Laat zien dat deze kromme vloeiend aansluit bij de punten $O$ en $A$.
- Onderzoek of dit ontwerp ook voldoet aan de eis voor de kromtestraal.

# Diagnostische toets

## 6.1 Toppen en buigpunten

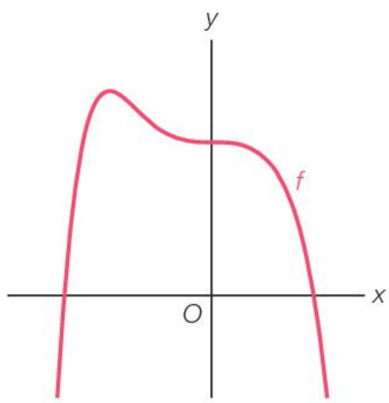
**1** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 9}$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van $f$ en geef het bereik.

**2** Gegeven is de functie $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$.
Toon met de afgeleide aan dat $f$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

**3** Gegeven is de functie $f(x) = 4 - (x^3 + 1)^2$.

**a** De grafiek van $f$ heeft één top.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

**b** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek.




**figuur 6.20**

## 6.2 De afgeleide van machtsfuncties

**4** Differentieer.

**a** $f(x) = \dfrac{5}{x^6}$ **b** $g(x) = \dfrac{x^6 - 2x^4}{x^5}$ **c** $h(x) = 4x^3 - \dfrac{3x - 2}{x^3}$

**5** Gegeven is de functie $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + 1$.

**a** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**b** De grafiek van $f$ heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-6$.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

**c** Onderzoek algebraïsch of de grafiek van $f$ een raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt 3.

**6** Bereken de afgeleide.

**a** $f(x) = \dfrac{8x^6 - x^4}{x\sqrt{x}}$ **b** $g(x) = \dfrac{6x - x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^3}$ **c** $h(x) = (x^2 + 2\sqrt{x})^2$

**7** De $y$-coördinaat van de top van de grafiek van $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$ is te schrijven in de vorm $\dfrac{a}{b \cdot \sqrt[4]{c}}$.
Bereken exact mogelijke waarden van $a$, $b$ en $c$.

## 6.3 De kettingregel

**8** Differentieer.

**a** $f(x) = x^3 - \dfrac{5}{(2x^2 - x)^4}$

**b** $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 15}$

**c** $h(x) = (x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}$

**9** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^3 - x^2$.

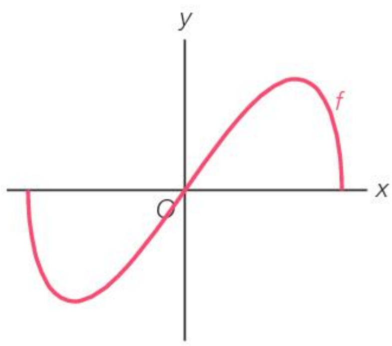
**a** Bereken exact de $x$-coördinaten van de punten van de grafiek van $f$ waarin de raaklijn horizontaal is.

**b** De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $A$ met $x_A = 2$ en snijdt de $x$-as in het punt $B$.
Bereken exact de $x$-coördinaat van $B$.

**10** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{50 - x^2}$.

**a** Bereken exact het bereik van $f$.

**b** Stel algebraïsch de formule op van de lijn $k$ die de grafiek van $f$ raakt in het punt $A$ met $x_A = 1$.




**figuur 6.21**

## 6.4 Functies met parameters

**11** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + px + 2$.

**a** De functie $f_p$ heeft een extreme waarde voor $x = 3$.
Bereken exact $p$ en de andere extreme waarde.

**b** De lijn $k$: $y = 12x + q$ raakt de grafiek van $f_p$ in het punt $A$ met $x_A = -1$.
Bereken $p$ en $q$.

**12** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van $f_p$ liggen.

**13** **a** Bereken exact voor welke $p$ de grafieken van $f(x) = x^3 - 3x$ en $g_p(x) = px + 16$ elkaar raken.

**b** Bereken exact voor welke $p$ de grafieken van $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en $g_p(x) = px + 4$ elkaar loodrecht snijden.

# 7

# Meetkunde met coördinaten

**Wat leer je?**

- Hoe het aantal oplossingen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen verband houdt met de onderlinge ligging van de bijbehorende lijnen.
- Hoeken berekenen tussen lijnen waarvan vergelijkingen zijn gegeven.
- Werken met vergelijkingen van cirkels.
- Berekenen van afstanden tussen punten, lijnen en cirkels in een assenstelsel.
- Opstellen van vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels.

# Beginopdracht De kwadratuur van een rechthoek

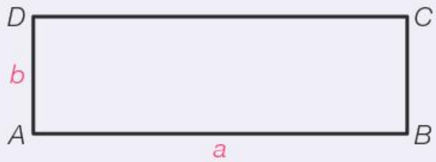
De oude Grieken hadden belangstelling voor vierkanten met dezelfde oppervlakte als een gegeven rechthoek of een gegeven cirkel.
Bij de kwadratuur van een rechthoek is het de bedoeling om een vierkant te construeren die dezelfde oppervlakte heeft als een gegeven rechthoek.
Met construeren wordt de manier van tekenen bedoeld waarbij je slechts een potlood, een passer en een rechte lat gebruikt. Bij construeren mag je een geodriehoek of een liniaal dus alleen gebruiken om lijnen te trekken, en niet om te meten.
De kwadratuur van een rechthoek was al bekend bij Euclides (omstreeks 300 v.Chr.).

Wiskundigen hebben duizenden jaren gezocht naar de kwadratuur van de cirkel. Uiteindelijk bewees Ferdinand von Lindemann in 1882 dat de kwadratuur van de cirkel onmogelijk is.

Bij de constructie van de kwadratuur van een rechthoek heb je twee basisconstructies nodig, namelijk de constructie van het midden van een lijnstuk en de constructie van een vierkant waarvan de rechte hoek en de zijde zijn gegeven.

- Teken een lijnstuk en construeer het midden van dit lijnstuk. Licht je werkwijze toe.
- Teken de figuur hiernaast over en construeer een vierkant met zijde *AB*. Licht je werkwijze toe.


Je onderzoekt de kwadratuur van een rechthoek door een constructie uit te voeren en de juistheid van deze constructie te bewijzen.
In de figuur hiernaast is rechthoek *ABCD* getekend.
De lengte van zijde *AB* is $a$ en de lengte van zijde *AD* is $b$.




- Je maakt de kwadratuur van deze rechthoek. Teken daartoe deze rechthoek met $a = 8$ cm en $b = 2{,}5$ cm en voer de volgende stappen uit.
  1. Teken de cirkel met middelpunt *C* en straal *CB*. Deze cirkel snijdt het verlengde van *DC* in het punt *E*.
  2. Construeer het midden *M* van *DE*.
  3. Teken de cirkel met middelpunt *M* en straal *MD*. Deze cirkel snijdt het verlengde van *BC* in het punt *F*.
  4. Construeer het vierkant waarvan *CF* een zijde is en een andere zijde op het verlengde van *DC* ligt. Noem dit vierkant *CGHF*.

De oppervlakte van het vierkant *CGHF* is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek *ABCD*.

- Bewijs dit. Ga uit van rechthoek *ABCD* met zijden $a$ en $b$.

# Voorkennis Stelsels vergelijkingen

## Theorie A Stelsels lineaire vergelijkingen

Het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ kun je oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.

Om $y$ te elimineren, vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 2 en de tweede met 3. Daarna tel je de vergelijkingen bij elkaar op.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = 20 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases}$$

$$\underline{\phantom{4x - 6y = 20}}\,+$$

$$7x \quad = 38$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\tfrac{3}{7} \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5\tfrac{3}{7} + 2y = 6 \\ 2y = \tfrac{4}{7} \\ y = \tfrac{2}{7} \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (5\tfrac{3}{7}, \tfrac{2}{7})$.

De lijnen $k$: $2x - 3y = 10$ en $l$: $x + 2y = 6$ snijden elkaar in het punt $(5\tfrac{3}{7}, \tfrac{2}{7})$.

Je kunt bij dit stelsel ook $x$ elimineren. Dat gaat als volgt.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\underline{\phantom{2x + 4y = 12}}\,-$$

$$-7y = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \tfrac{2}{7} \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 2 \cdot \tfrac{2}{7} = 6 \\ x + \tfrac{4}{7} = 6 \\ x = 5\tfrac{3}{7} \end{array}$$

**1** Los op.

**a** $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

**b** $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases}$

**c** $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

**2** **a** De lijnen $k$: $3x + 2y = 5$ en $l$: $x - 4y = 11$ snijden elkaar in het punt $P$. Bereken de coördinaten van $P$.

**b** De lijnen $m$: $4x - 5y = 6$ en $n$: $3x - 2y = 1$ snijden elkaar in het punt $Q$. Bereken de coördinaten van $Q$.

# 7.1 Lijnen en hoeken

**01** Gegeven zijn de lijnen $k$: $2x + 3y = 12$ en $l$: $4x + 6y = 15$.

**a** Teken $k$ en $l$ in één figuur.

**b** Hoe volgt uit vraag a dat het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases}$ geen oplossing heeft?

**c** Hoe kun je aan de formules van $k$ en $l$ zien dat de lijnen evenwijdig zijn?

## Theorie A Strijdige, afhankelijke en onafhankelijke vergelijkingen

De lijnen $m$: $2x - 3y = 5$ en $n$: $4x - 6y = 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en vallen niet samen. Ook zonder $y$ vrij te maken kun je dat inzien, want $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{5}{7}$.

Omdat je met twee evenwijdige lijnen te maken hebt, heeft het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 7 \end{cases}$ geen oplossing. We noemen de vergelijkingen van het stelsel **strijdig**.

$m$: $2x - 3y = 5$
$-3y = -2x + 5$
$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$
$n$: $4x - 6y = 7$
$-6y = -4x + 7$
$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{1}{6}$
Dus $rc_m = rc_n$.

De lijnen $p$: $2x - 3y = 5$ en $q$: $4x - 6y = 10$ vallen samen.
Het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ heeft oneindig veel oplossingen.
We noemen de vergelijkingen van het stelsel **afhankelijk**.

**De lijnen $k$: $ax + by = c$ en $l$: $px + qy = r$**

- zijn evenwijdig als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$,
  de vergelijkingen $ax + by = c$ en $px + qy = r$ zijn dan strijdig;
- vallen samen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$,
  de vergelijkingen $ax + by = c$ en $px + qy = r$ zijn dan afhankelijk;
- hebben een snijpunt als $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$,
  de vergelijkingen $ax + by = c$ en $px + qy = r$ zijn dan onafhankelijk.

### Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k_p$: $px + (p + 1)y = 5$ en $l_{p,q}$: $(p - 1)x + (p - 3)y = q$.
Bereken voor welke $p$ en $q$ de lijnen $k_p$ en $l_{p,q}$ samenvallen.

*Uitwerking*

Samenvallen, dus $\frac{p}{p-1} = \frac{p+1}{p-3} = \frac{5}{q}$.

$\frac{p}{p-1} = \frac{p+1}{p-3}$ geeft $p(p-3) = (p-1)(p+1)$

$p^2 - 3p = p^2 - 1$

$-3p = -1$

$p = \frac{1}{3}$

$p = \frac{1}{3}$ geeft $\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1\frac{1}{3}}{-2\frac{2}{3}} = \frac{5}{q}$ oftewel $\frac{1}{-2} = \frac{5}{q}$, dus $q = -10$.

Dus voor $p = \frac{1}{3}$ en $q = -10$ vallen de lijnen samen.

**R2**
Zie het voorbeeld.
Voor welke $p$ en $q$
- **a** zijn $k_p$ en $l_{p,q}$ evenwijdige lijnen
- **b** hebben $k_p$ en $l_{p,q}$ een snijpunt
- **c** snijden $k_p$ en $l_{p,q}$ elkaar in het punt $(2, -3)$?

**3**
Gegeven zijn de lijnen $k_p$: $3x + py = 5$ en $l_{p,q}$: $(p - 1)x + (p + 4)y = q$.
Bereken voor welke $p$ en $q$
- **a** de lijnen $k_p$ en $l_{p,q}$ samenvallen
- **b** de lijnen $k_p$ en $l_{p,q}$ evenwijdig zijn.

**A4**
De lijnen $k_{p,q}$: $px + qy = 4$ en $l_{p,q}$: $(q + 3)x + (p - 1)y = 1$ vallen samen.
Bereken $p$ en $q$.

**O5**
Gegeven is de lijn $l$: $2x + 3y = 18$.
- **a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van $l$ met de $x$-as en de $y$-as.
- **b** Licht toe dat de vergelijking $2x + 3y = 18$ ook kan worden geschreven als $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$.
- **c** Hoe kun je in de vorm $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$ de coördinaten van de snijpunten van $l$ met de assen herkennen?

**O6**
Gegeven is de lijn $k$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- **a** Toon aan dat $k$ de $x$-as snijdt in het punt $(a, 0)$.
- **b** Toon aan dat $k$ de $y$-as snijdt in het punt $(0, b)$.

## Theorie B De assenvergelijking van een lijn

De lijn $k$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijdt de $x$-as in het punt $(a, 0)$ en de $y$-as in het punt $(0, b)$. Dit gebruik je om een vergelijking van een lijn op te stellen als de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de assen bekend zijn. De vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de **assenvergelijking van de lijn**.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijden met de $x$-as, dus $y = 0$, geeft $\frac{x}{a} = 1$ oftewel $x = a$.
Het snijpunt is $(a, 0)$.

**De lijn door de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$ met $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ heeft de vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.**

### Voorbeeld

De lijn $k$ snijdt de $x$-as in het punt $(6, 0)$ en de $y$-as in het punt $(0, q)$.

**a** Stel een vergelijking op van $k$ in de vorm $ax + by = c$.

**b** Voor welke waarde van $q$ is $k$ evenwijdig met de lijn $l$: $y = 3x + 2$?

*Uitwerking*

**a** $k$: $\frac{x}{6} + \frac{y}{q} = 1$ — Vermenigvuldig alle termen met $6q$.

$k$: $qx + 6y = 6q$

**b** $k$: $qx + 6y = 6q$ en $l$: $3x - y = -2$

$k \,//\, l$ geeft $\frac{q}{3} = \frac{6}{-1} \neq \frac{6q}{-2}$

$\frac{q}{3} = \frac{6}{-1}$ geeft $q = -18$ en $\frac{6}{-1} \neq \frac{6q}{-2}$ geeft $q \neq 2$.

Dus voor $q = -18$ is $k \,//\, l$.

**7** Stel een assenvergelijking op van de lijn en schrijf de vergelijking vervolgens in de vorm $ax + by = c$.

**a** $l$ door $(p, 0)$ en $(0, 5)$

**b** $m$ door $(4, 0)$ en $(0, q)$

**c** $n$ door $(3r, 0)$ en $(0, r)$

**8** De lijn $k$ snijdt de $x$-as in het punt $(p, 0)$ en de $y$-as in het punt $(0, 8)$.

**a** Stel een vergelijking op van $k$ in de vorm $ax + by = c$.

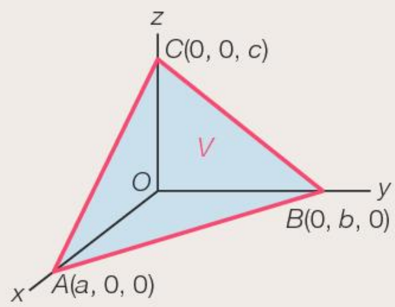
**b** Bereken $p$ in het geval het punt $(1, 2)$ op $k$ ligt.

**c** Voor welke $p$ is $k$ evenwijdig met de lijn $l$: $y = 2x + 3$?

INFORMATIEF

## De assenvergelijking van een vlak

Om in de ruimte de coördinaten van een punt vast te leggen wordt gewerkt met een *Oxyz*-assenstelsel. Dit wordt meestal getekend zoals in de figuur hiernaast.
In dit assenstelsel is een vlak $V$ getekend dat de $x$-as snijdt in het punt $A(a, 0, 0)$, de $y$-as in het punt $B(0, b, 0)$ en de $z$-as in het punt $C(0, 0, c)$.
De assenvergelijking van dit vlak is $V\colon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.




**A9** De lijn $k$ snijdt de assen in de punten $(3, 0)$ en $(0, p)$ en de lijn $l$ snijdt de assen in de punten $(2p, 0)$ en $(0, 5)$.

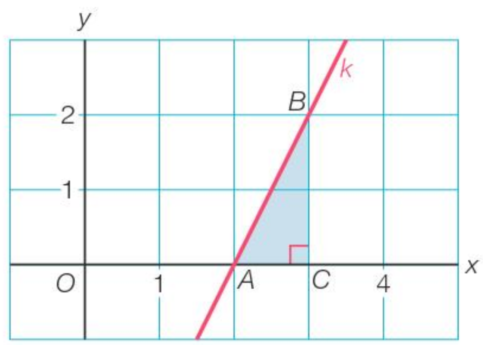
**a** Stel van $k$ en van $l$ een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.
**b** Voor welke $p$ ligt het punt $A(1, 2)$ op $k$? En voor welke $p$ op $l$?
**c** Voor welke $p$ is de lijn $k$ evenwijdig met de lijn $m\colon y = 4x + 5$?
**d** Voor welke $p$ is de lijn $l$ evenwijdig met de lijn $n\colon 2x + 3y = 10$?

**A10** Gegeven zijn de lijnen $l_p\colon \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1$.
Voor welke $p$

**a** gaat $l_p$ door het punt $(3, 4)$
**b** is de richtingscoëfficiënt van $l_p$ gelijk aan 2?

**O11** In figuur 7.1 zijn de lijn $k\colon y = 2x - 4$ en het punt $C(3, 0)$ getekend.
Het punt $A(2, 0)$ is het snijpunt van $k$ met de $x$-as, het punt $B(3, 2)$ ligt op $k$.
Er geldt $\angle CAB \approx 63{,}435°$.

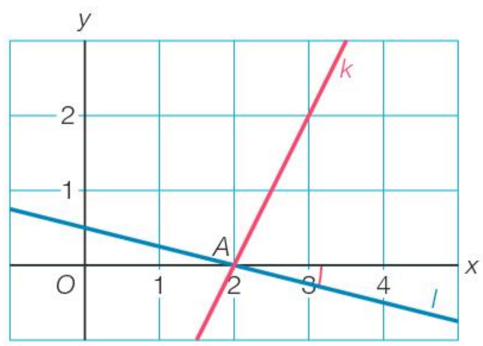
**a** Toon dit aan.




**figuur 7.1**

In figuur 7.2 is bovendien de lijn $l\colon y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ getekend. De hoek tussen $l$ en de $x$-as is met een boogje aangegeven.
Deze hoek is ongeveer $14{,}036°$.

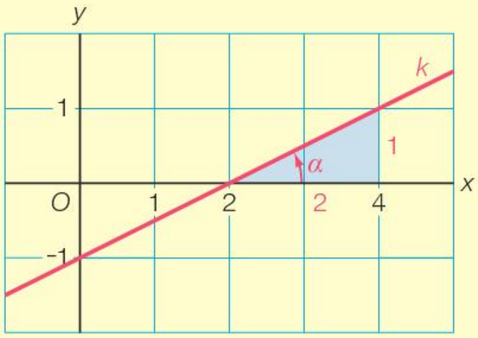
**b** Toon dit aan.
**c** Bereken de hoek tussen de lijnen $k$ en $l$.
Rond af op één decimaal.




**figuur 7.2**

## Theorie C De hoek tussen twee lijnen

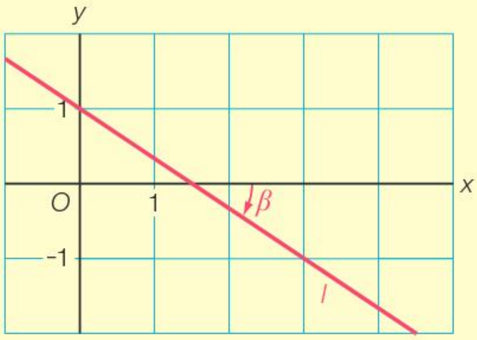
In figuur 7.3 is de lijn $k$: $y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend.
De **richtingshoek** van deze lijn is de hoek $\alpha$ waarover je de $x$-as moet draaien om de $x$-as te laten samenvallen met $k$. Hierbij is $-90° < \alpha \leq 90°$.
Je ziet dat $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\alpha = 26{,}56...°$.



figuur 7.3

**Voor de richtingshoek $\alpha$ van de lijn $k$ geldt $\tan(\alpha) = rc_k$ en $-90° < \alpha \leq 90°$.**

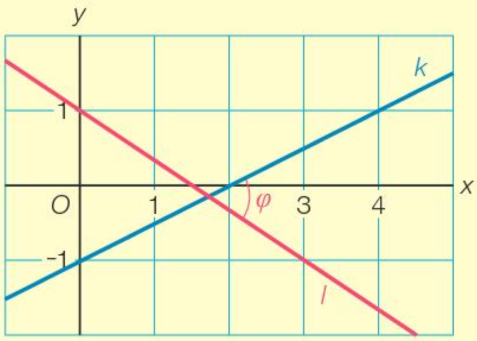
De richtingshoek van de lijn $l$: $y = -\frac{2}{3}x + 1$ in figuur 7.4 is aangegeven met $\beta$.
Er geldt $\tan(\beta) = rc_l$, dus $\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$ en dit geeft $\beta = -33{,}69...°$.
De richtingshoek van de lijn $l$ is dus negatief.



figuur 7.4

Bij berekeningen met richtingshoeken nemen we aan dat de eenheden op de assen gelijk zijn.

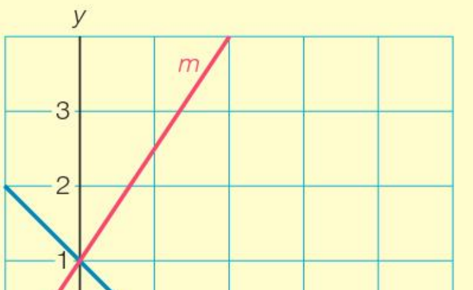
In figuur 7.5 is zowel de lijn $k$: $y = \frac{1}{2}x - 1$ als de lijn $l$: $y = -\frac{2}{3}x + 1$ getekend.
De **hoek tussen de lijnen** $k$ en $l$ is aangegeven met $\varphi$.
Hier is $\varphi = \alpha - \beta = 26{,}56...° - -33{,}69...° \approx 60{,}3°$.



figuur 7.5

Voor de hoek $\varphi$ tussen twee lijnen nemen we altijd de hoek waarvoor geldt $0° \leq \varphi \leq 90°$.

In figuur 7.6 zie je de lijnen $m$: $y = 1\frac{1}{2}x + 1$ en $n$: $y = -x + 1$.
Voor de richtingshoek $\alpha$ van $m$ geldt $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$, dus $\alpha = 56{,}30...°$, en voor de richtingshoek $\beta$ van $n$ geldt $\tan(\beta) = -1$, dus $\beta = -45°$.
Omdat $\alpha - \beta = 56{,}30...° - -45° \approx 101{,}3°$ geldt voor de hoek $\varphi$ tussen $m$ en $n$ dat
$\varphi \approx 180° - 101{,}3° = 78{,}7°$.



figuur 7.6

**Voor de hoek $\varphi$ tussen twee lijnen met richtingshoeken $\alpha$ en $\beta$, waarbij $\alpha > \beta$, geldt**
- **$\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90°$**
- **$\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90°$.**

**Voorbeeld**

Bereken de hoek tussen de lijnen $k$: $5x - 4y = 6$ en $l$: $5x + 3y = 2$.
Rond af op gehelen.

*Uitwerking*

$k$: $5x - 4y = 6$
$-4y = -5x + 6$
$y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = 51{,}34...°$
$l$: $5x + 3y = 2$
$3y = -5x + 2$
$y = -1\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$
$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -1\frac{2}{3}$ geeft $\beta = -59{,}03...°$
$\alpha - \beta = 51{,}34...° - -59{,}03...° \approx 110°$
Dus $\angle(k, l) \approx 180° - 110° = 70°$.

**R12** Bij het berekenen van richtingshoeken wordt aangenomen dat de eenheden op de assen gelijk zijn.
Licht toe dat deze aanname nodig is.

**13** Bereken de hoek tussen de lijnen. Rond af op gehelen.
**a** $k$: $y = 3x + 4$ en $l$: $y = 2x - 1$
**b** $m$: $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ en $n$: $y = -\frac{1}{2}x + 3$
**c** $p$: $y = 3\frac{1}{2}x - 1$ en $q$: $y = -1\frac{1}{4}x + 5$

**14** Bereken de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.
**a** $k$: $3x - 2y = 5$ en $l$: $4x - 3y = 6$
**b** $m$: $4x + y = 1$ en $n$: $3x + 4y = 2$
**c** $p$: $5x + 3y = 4$ en $q$: $6x - 5y = 1$

**A15** Bereken de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.
**a** $k$: $y = \frac{2}{3}x + 4$ en $l$: $6x - 5y = 3$
**b** $m$ door $(4, 0)$ en $(0, 5)$ en $n$ door $(-2, 0)$ en $(0, 1)$
**c** $p$ door $(2, 1)$ en $(5, 6)$ en $q$ door $(-3, 1)$ en $(2, -6)$

**A16** De lijnen $k$: $y = 2x - 3$ en $l$ snijden elkaar onder een hoek van 20°.
Bereken mogelijke richtingscoëfficiënten van $l$. Rond af op twee decimalen.

**E17** Gegeven zijn de lijnen $k$: $2x - 5y = 9$ en $l$: $ax + by = 3$.
Bereken $a$ en $b$ in het geval $k$ en $l$ elkaar onder een hoek van 60° snijden in het punt $S(2, -1)$. Rond af op twee decimalen.

# Terugblik

## Strijdige, afhankelijke en onafhankelijke vergelijkingen

De vergelijkingen in het stelsel $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$ zijn strijdig als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$, zijn afhankelijk als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ en zijn onafhankelijk als $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$.

Zo heb je bij het stelsel $\begin{cases} 2x - 6y = 13 \\ 5x - 15y = 29 \end{cases}$ met strijdige vergelijkingen te maken. Het stelsel heeft geen oplossing, de lijnen $k$: $2x - 6y = 13$ en $l$: $5x - 15y = 29$ zijn evenwijdig.
De lijnen $k$: $2x - 6y = 13$ en $m$: $5x - 15y = 32\frac{1}{2}$ vallen samen omdat geldt $\frac{2}{5} = \frac{-6}{-15} = \frac{13}{32\frac{1}{2}}$.

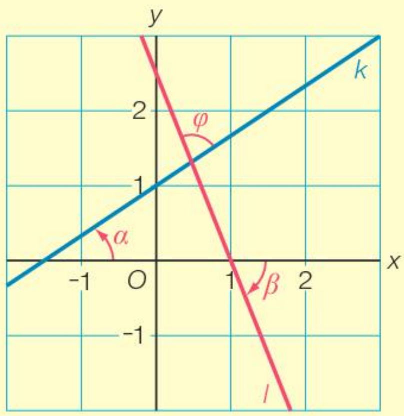
## De assenvergelijking van een lijn

De vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de assenvergelijking van een lijn. De lijn snijdt de assen in de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$.
Snijdt de lijn $k$ de assen in de punten $(5, 0)$ en $(0, -6)$, dan hoort hierbij de vergelijking $\frac{x}{5} + \frac{y}{-6} = 1$ oftewel $6x - 5y = 30$.

## De hoek tussen twee lijnen

Voor de richtingshoek $\alpha$ van een lijn $l$ geldt $-90° < \alpha \leq 90°$ en $\tan(\alpha) = \text{rc}_l$.

De lijn $k$: $y = \frac{2}{3}x + 1$ in de figuur hiernaast heeft richtingshoek $\alpha$. Er geldt $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ en dit geeft $\alpha = 33{,}69...°$.
De lijn $l$: $y = -2\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ heeft richtingshoek $\beta$.
Er geldt $\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ en dit geeft $\beta = -68{,}19...°$.
De hoek tussen $k$ en $l$ is in de figuur aangegeven met $\varphi$.
De hoek tussen twee lijnen is de niet-stompe hoek tussen de lijnen.
Omdat $\alpha - \beta = 33{,}69...° - -68{,}19...° \approx 101{,}9°$ is $\varphi \approx 180° - 101{,}9° = 78{,}1°$.



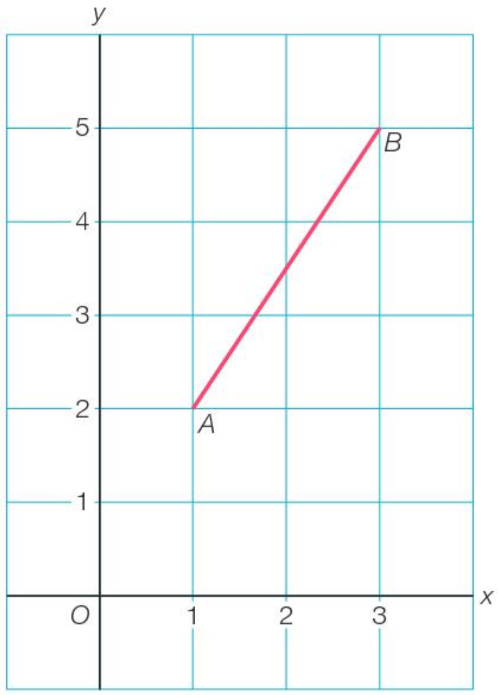
# 7.2 Afstanden bij punten en lijnen

**O18** Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$ en $B(3, 5)$. Zie figuur 7.7.

**a** Bereken exact de lengte van het lijnstuk $AB$.

**b** Het punt $M$ is het midden van het lijnstuk $AB$. Hoe volgen de coördinaten van $M$ uit de coördinaten van $A$ en $B$? Geef de coördinaten van $M$.

**c** Geef de coördinaten van het midden $N$ van het lijnstuk $CD$ met $C(83, 61)$ en $D(89, 69)$.



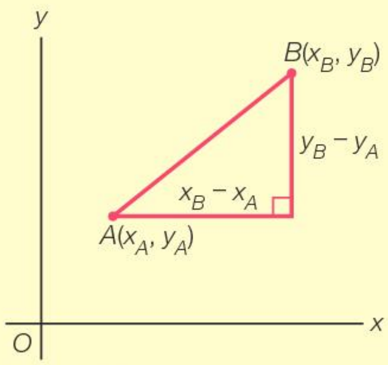

**figuur 7.7**

## Theorie A De afstand tussen twee punten

De afstand tussen de punten $A$ en $B$ is de lengte van het lijnstuk $AB$. Voor de lengte van het lijnstuk $AB$ bestaat de notatie $d(A, B)$. In deze notatie is de letter $d$ van distance (afstand) gebruikt.

In figuur 7.8 zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ getekend. Met de stelling van Pythagoras in de getekende driehoek vind je $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, dus de afstand tussen de punten $A$ en $B$ is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Om de coördinaten van het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ te berekenen, neem je het gemiddelde van de $x$-coördinaten van $A$ en $B$ en het gemiddelde van de $y$-coördinaten van $A$ en $B$. Zo krijg je $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$.




**figuur 7.8**

**Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt**
- **de afstand tussen $A$ en $B$ is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$**
- **de coördinaten van het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.**

### Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(4, q)$.

**a** Neem $p = 2$ en $q = 6$ en bereken de afstand tussen $A$ en $B$.
**b** Druk de coördinaten van het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ uit in $p$ en $q$.
**c** Neem $q = 2p$ en druk de afstand tussen $A$ en $B$ uit in $p$.

*Uitwerking*

**a** $A(2, 3)$ en $B(4, 6)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

**b** $M(\frac{1}{2}(p+4), \frac{1}{2}(3+q)) = M(\frac{1}{2}p + 2, 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q)$

**c** $A(p, 3)$ en $B(4, 2p)$ geeft

$d(A, B) = \sqrt{(4-p)^2 + (2p-3)^2} = \sqrt{16 - 8p + p^2 + 4p^2 - 12p + 9} = \sqrt{5p^2 - 20p + 25}$

**19** Gegeven zijn de punten $A(0, p)$ en $B(p, 7)$.
**a** Neem $p = 12$ en bereken de afstand tussen $A$ en $B$.
**b** Neem $p = -2$ en bereken de coördinaten van het midden $M_1$ van het lijnstuk $AB$.
**c** Neem $p = 4$ en bereken de afstand tussen $A$ en het midden $M_2$ van het lijnstuk $AB$.
**d** Druk de coördinaten van het midden $M_3$ van het lijnstuk $AB$ uit in $p$.
**e** Druk de afstand tussen $A$ en $B$ uit in $p$.

**20** Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(p + 2, 2p)$.
**a** Druk de coördinaten van het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ uit in $p$.

Voor de afstand tussen $A$ en $B$ geldt $d(A, B) = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$.
**b** Toon dit aan.
**c** Bereken voor welke $p$ de afstand tussen $A$ en $B$ gelijk is aan 5. Rond af op twee decimalen.

**A21** Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(p + 5, p + 2)$.
**a** Bereken $y_M$ in het geval voor het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ geldt $x_M = 10$.
**b** Bereken voor welke $p$ het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ op de lijn $k$: $y = 2x - 3$ ligt.
**c** De afstand $d$ tussen de punten $A$ en $B$ is te schrijven in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + b}$.
Bereken $a$ en $b$.

**O22** Gegeven zijn de lijnen $k$: $2x - y = 2$ en $l$: $x + 2y = 3$.
**a** Bereken $rc_k$ en $rc_l$.
**b** Hoe volgt uit vraag a dat $k$ en $l$ loodrecht op elkaar staan?

## Theorie B De afstand van een punt tot een lijn

Je weet:

Voor de lijnen $k$ en $l$ met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:
$rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.

Van de lijn $k$: $ax + by = c$ met $b \neq 0$ is $rc_k = -\frac{a}{b}$.

Van de lijn $l$: $bx - ay = d$ met $a \neq 0$ is $rc_l = \frac{b}{a}$.

Hieruit volgt $rc_k \cdot rc_l = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$, dus $k \perp l$.

**De lijnen $k$: $ax + by = c$ en $l$: $bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar.**

### Voorbeeld

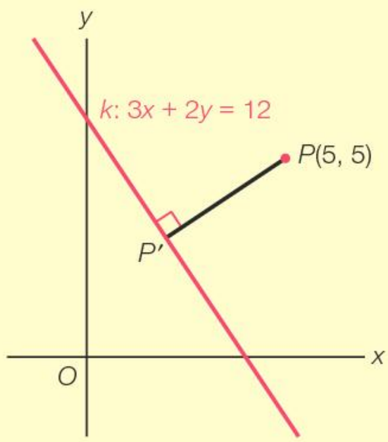
De lijn $k$ gaat door het punt $A(2, -5)$ en staat loodrecht op de lijn $l$: $3x + 4y = 12$.
Stel van $k$ een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

*Uitwerking*

$$\left.\begin{array}{l} k \perp l\text{, dus } k\text{: } 4x - 3y = c \\ \text{door } A(2, -5) \end{array}\right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot -5 = 23$$

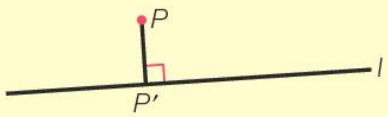
Dus $k$: $4x - 3y = 23$.

Bij de afstand van een punt tot een lijn speelt het begrip **loodrechte projectie** een rol.
In figuur 7.9 is $P'$ de loodrechte projectie van het punt $P(5, 5)$ op de lijn $k$: $3x + 2y = 12$.
De afstand van het punt $P$ tot de lijn $k$ is gelijk aan de lengte van het lijnstuk $PP'$.
De coördinaten van $P'$ krijg je door een vergelijking op te stellen van de lijn $l$ die door $P$ gaat en loodrecht staat op $k$. Het snijpunt van $k$ en $l$ is $P'$. Vervolgens gebruik je $d(P, k) = d(P, P')$.
Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.




**figuur 7.9**

**De afstand van een punt $P$ tot een lijn $l$ is de afstand van $P$ tot zijn loodrechte projectie $P'$ op $l$.**




$d(P, l) = d(P, P')$

### Voorbeeld

Bereken exact de afstand van het punt $P(5, 5)$ tot de lijn $k$: $3x + 2y = 12$.

*Uitwerking*

De lijn $l$ gaat door $P$ en staat loodrecht op $k$.

$$\left.\begin{array}{l} l: 2x - 3y = c \\ \text{door } P(5, 5) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5$$

Dus $l$: $2x - 3y = -5$.

$k$ en $l$ snijden geeft het punt $P'$.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 6y = 36 \\ 4x - 6y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\hphantom{4x - 6y = -10}} + \\ 13x \quad = 26 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2y = 12 \\ 2y = 6 \\ y = 3 \end{array}$$

Dus $P'(2, 3)$ en $d(P, k) = d(P, P') = \sqrt{(2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

**R23** In de theorie op de vorige bladzijde staan boven de eerste rode kernzin de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$. In de rode kernzin ontbreken deze voorwaarden. Waarom zijn deze voorwaarden wel nodig in de theorie en niet in de kernzin?

**24**
- **a** De lijn $k$ gaat door het punt $A(4, 1)$ en staat loodrecht op de lijn $l$: $2x - 3y = 5$.
  Stel van $k$ een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- **b** De lijn $m$ gaat door het punt $B(3, -1)$ en staat loodrecht op de lijn $n$: $4x + 5y = 6$.
  Stel van $m$ een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- **c** De lijn $p$ gaat door het punt $C(-4, 3)$ en staat loodrecht op de lijn $q$: $2x - y = 6$.
  Stel van $p$ een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.

**25**
- **a** De lijn $k$ gaat door de punten $A(2, 3)$ en $B(6, 5)$.
  De lijn $l$ gaat door het punt $C(4, 6)$ en staat loodrecht op $k$.
  Stel van $l$ een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.
- **b** De lijn $m$ gaat door de punten $D(-3, 4)$ en $E(2, -6)$.
  De lijn $n$ gaat door het punt $F(3, 7)$ en staat loodrecht op $m$.
  Stel van $n$ een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ met $a$, $b$ en $c$ geheel.

**26** Bereken exact de afstand van
- **a** het punt $A(6, 0)$ tot de lijn $k$: $2x + y = 2$
- **b** het punt $B(3, 0)$ tot de lijn $l$: $y = \frac{1}{2}x + 1$
- **c** de oorsprong tot de lijn $m$: $3x + y = 10$.

**27** Bereken exact de afstand van het punt $C(2, -12)$ tot de lijn door de punten $A(-5, -3)$ en $B(-2, 6)$.

**A28** Gegeven is $\triangle ABC$ met de hoekpunten $A(1, 0)$, $B(7, 4)$ en $C(3\frac{1}{2}, 6)$.

**a** Bereken exact de afstand van $C$ tot de lijn door $A$ en $B$.

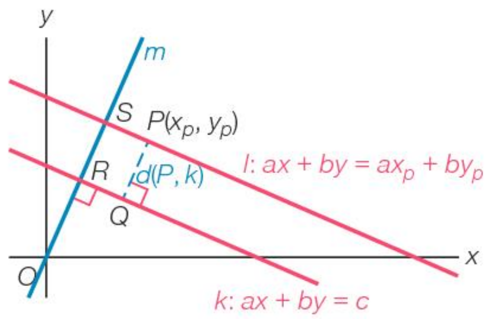
**b** Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.

**A29** Bereken exact de afstand tussen de lijnen $k$: $x - 3y = 1$ en $l$: $x - 3y = 6$. Schrijf het antwoord in de vorm $p\sqrt{q}$ met $q$ een zo klein mogelijk geheel getal.

**O30** In figuur 7.10 zie je het punt $P(x_P, y_P)$ en de lijn $k$: $ax + by = c$.
In deze opgave ga je bewijzen dat voor de afstand van $P$ tot $k$ de formule

$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ geldt.}$$

We gebruiken daarbij de lijn $l$: $ax + by = ax_P + by_P$ door $P$ evenwijdig met $k$ en de lijn $m$ door $O$ loodrecht $k$. De lijn $m$ snijdt $k$ en $l$ in de punten $R$ en $S$. Omdat $PQRS$ een rechthoek is, geldt $d(P, k) = d(S, R)$.



**figuur 7.10**

**a** Licht toe dat $y = \frac{b}{a}x$ een vergelijking van $m$ is.

**b** Toon aan dat $R$ het punt $\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right)$ is en $S$ het punt $\left(\frac{a^2x_P + aby_P}{a^2 + b^2}, \frac{abx_P + b^2y_P}{a^2 + b^2}\right)$.

**c** Licht toe dat $d(S, R) = \sqrt{\left(\frac{a^2x_P + aby_P - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{abx_P + b^2y_P - bc}{a^2 + b^2}\right)^2}$ en toon aan dat dit te herleiden is tot

$$d(S, R) = \frac{\sqrt{(a(ax_P + by_P - c))^2 + (b(ax_P + by_P - c))^2}}{a^2 + b^2}.$$

Stel $E = ax_P + by_P - c$. Daarmee wordt $d(S, R) = \frac{\sqrt{(aE)^2 + (bE)^2}}{a^2 + b^2}$.

**d** Herleid $d(S, R) = \frac{\sqrt{(aE)^2 + (bE)^2}}{a^2 + b^2}$ tot $d(S, R) = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2}$.

**e** Toon aan dat $d(S, R) = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2}$ te herleiden is tot $d(S, R) = \frac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ en maak het bewijs af.

## Theorie C De afstandsformule

In opgave 30 heb je een formule bewezen voor de afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn $k$: $ax + by = c$.

**De afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn $k$: $ax + by = c$ is**

$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Met deze **afstandsformule** is sneller de afstand van een gegeven punt tot een gegeven lijn te berekenen dan op de manier van theorie B. Bovendien zijn met deze formule ook andere problemen op te lossen. Zoek je de punten $P$ op de $x$-as die afstand $\sqrt{5}$ tot de lijn $k$: $x - 2y = 3$ hebben, dan stel je $P(p, 0)$. Met de afstandsformule krijg je vervolgens

$$\frac{|p - 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5} \text{ oftewel } \frac{|p - 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|p - 3| = 5$$

$$p - 3 = 5 \vee p - 3 = -5$$

$$p = 8 \vee p = -2$$

Dus de punten zijn $P_1(-2, 0)$ en $P_2(8, 0)$.

### Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de lijnen $k$ die door het punt $B(5, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{10}$ van het punt $A(3, 4)$ liggen.

*Uitwerking*

Stel $k$: $y = ax + b$.

$k$ door $(5, 0)$ geeft $5a + b = 0$, dus $b = -5a$.

$k$: $y = ax - 5a$ oftewel $k$: $ax - y - 5a = 0$

$$d(A, k) = \sqrt{10} \text{ geeft } \frac{|3a - 4 - 5a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-2a - 4| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$4a^2 + 16a + 16 = 10a^2 + 10$$

$$-6a^2 + 16a + 6 = 0$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\tfrac{1}{3}$$

$a = 3$ geeft $b = -15$, dus $k_1$: $y = 3x - 15$.

$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = 1\frac{2}{3}$, dus $k_2$: $y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$.

- $|A| = A \vee |A| = -A$, dus het kwadraat van $|A|$ is $A^2$.
- $|A| = \sqrt{B}$ geeft $A^2 = B$.

**R31** Zie het voorbeeld.

De formule $d(P, k) = \dfrac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ gaat uit van de vorm $ax + by = c$, maar in de eerste regel van de uitwerking wordt $k$: $y = ax + b$ gesteld.

**a** Welk probleem ontstaat als daar was uitgegaan van $k$: $ax + by = c$?

**b** Had je ook uit kunnen gaan van $k$: $x + by = c$? En van $k$: $ax + by = 1$?

**32** Onderzoek met berekeningen welk van de punten $A(1, -1)$, $B(2, 3\frac{1}{2})$ of $C(6, 5)$ het dichtst bij de lijn $k$: $x - 4y = -4$ ligt.

**33** Bereken exact de afstand van het punt

**a** $A(2, 5)$ tot de lijn $k$: $3x + 4y = 10$

**b** $B(2, -1)$ tot de lijn $l$: $y = -2x + 5$

**c** $C(5, 3)$ tot de lijn $m$: $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{2} = 1$.

**34** **a** Stel vergelijkingen op van de lijnen $k$ die door het punt $A(0, 4)$ gaan en op afstand 5 van het punt $B(5\frac{1}{2}, 5)$ liggen.

**b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die door het punt $C(3, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{5}$ van het punt $D(6, 4)$ liggen.

**35** Gegeven is de lijn $k$: $5x + 12y = 26$. De lijnen $l$ zijn evenwijdig met $k$ en hebben de afstand 3 tot $k$.

Om vergelijkingen van deze lijnen te vinden ga je uit van de vorm $l$: $5x + 12y = c$.

Neem een punt $P$ op $k$, los de vergelijking $d(P, l) = 3$ op en geef vergelijkingen van $l$.

**A36** Gegeven is de lijn $k$: $3x + 4y = 12$.

**a** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die op afstand 2 van $k$ liggen.

**b** Bereken de coördinaten van de punten $P$ op de $x$-as die op afstand 3 van $k$ liggen.

**A37** Bereken de coördinaten van de punten op de parabool $y = 2x^2$ die afstand $\sqrt{5}$ tot de lijn $k$: $x - 2y = 2$ hebben.

**E38** Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$ en $B(6, 0)$.

Stel vergelijkingen op van de lijnen $k$ waarvoor geldt $d(A, k) = \sqrt{2}$ en $d(B, k) = 2\sqrt{2}$.

# Terugblik

### De afstand tussen twee punten

Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- de afstand tussen $A$ en $B$ is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- de coördinaten van het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.

Voor de punten $A(p, 3p)$ en $B(2p, p + 6)$ geldt dus

- het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ is $M(\frac{1}{2}(p + 2p), \frac{1}{2}(3p + p + 6)) = M(1\frac{1}{2}p, 2p + 3)$
- $d(A, B) = \sqrt{(2p - p)^2 + (p + 6 - 3p)^2} = \sqrt{p^2 + (6 - 2p)^2}$
  $= \sqrt{p^2 + 36 - 24p + 4p^2} = \sqrt{5p^2 - 24p + 36}$.

Om te berekenen voor welke $p$ geldt $d(A, B) = 5$, voer je de formules $y_1 = \sqrt{5x^2 - 24x + 36}$ en $y_2 = 5$ in op de GR en gebruik je de optie snijpunt. Je krijgt $p \approx 0{,}51$ en $p \approx 4{,}29$.

### Onderling loodrechte lijnen

De lijnen $k$: $ax + by = c$ en $l$: $bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar.
De lijn $q$ die loodrecht staat op de lijn $p$: $2x - 5y = 1$ is van de vorm $5x + 2y = c$. Is gegeven dat $q$ door het punt $S(4, -3)$ gaat, dan is $c = 5 \cdot 4 + 2 \cdot -3 = 14$ en $q$: $5x + 2y = 14$.

### De afstand van een punt tot een lijn

De afstand van een punt $P$ tot een lijn $l$ is de afstand van $P$ tot zijn loodrechte projectie $P'$ op $l$.
De afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn $k$: $ax + by = c$ bereken je met de afstandsformule $d(P, k) = \dfrac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Zo is de afstand van het punt $A(3, 2)$ tot de lijn $k$: $4x - 3y = 10$ gelijk aan $d(A, k) = \dfrac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$.

Met de afstandsformule stel je als volgt vergelijkingen op van de lijnen $l$ die op afstand 3 van de lijn $k$: $4x - 3y = 10$ liggen.
Stel $l$: $4x - 3y = c$.
$P(2\frac{1}{2}, 0)$ op $k$ geeft $d(P, l) = \dfrac{|10 - 0 - c|}{\sqrt{25}}$.

$d(P, l) = 3$ geeft $\dfrac{|10 - c|}{5} = 3$ en hieruit volgt $c = -5 \vee c = 25$.
Dus de lijnen zijn $l_1$: $4x - 3y = -5$ en $l_2$: $4x - 3y = 25$.

# 7.3 Cirkelvergelijkingen

**O39** Gegeven is het punt $M(1, 4)$ en het variabele punt $P(x, y)$.
Voor de afstand $d$ tussen $M$ en $P$ geldt $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$.
**a** Licht dit toe.

In het geval $d = 5$ krijg je de vergelijking $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
**b** Licht toe dat deze vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = 5$.
**c** Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10.
**d** Geef van de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ de coördinaten van het middelpunt en de lengte van de straal.

## Theorie A De cirkelvergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

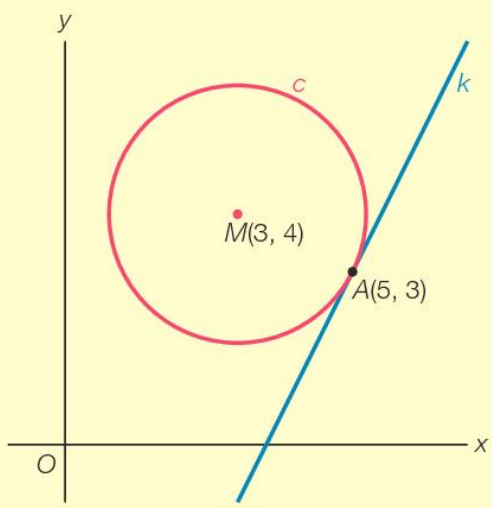
Voor een punt $P(x, y)$ op afstand $r$ van $M(x_M, y_M)$ geldt
$d(M, P) = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$ en $d(M, P) = r$, dus
$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r$. Kwadrateren geeft $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Hiermee is een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal $r$ opgesteld.

**De cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal $r$ heeft vergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.**

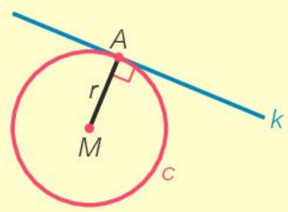
In figuur 7.11 zie je de cirkel $c$ met middelpunt $M(3, 4)$ die door het punt $A(5, 3)$ gaat. Omdat $M(3, 4)$ is de vergelijking van $c$ van de vorm $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$.
$A(5, 3)$ ligt op $c$, dus
$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - 5)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.
Dus $c$: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Verder zie je in de figuur de lijn $k$ die de cirkel raakt in $A$.
Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van $M$ tot $k$, dus $r = d(M, k)$.



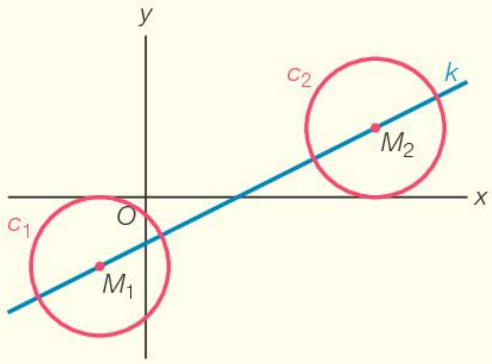
**figuur 7.11**

**Raakt de lijn $k$ de cirkel $c$ met middelpunt $M$ en straal $r$ in het punt $A$, dan geldt $MA \perp k$ en $d(M, k) = r$.**



### Voorbeeld

Er zijn twee cirkels $c_1$ en $c_2$ waarvan het middelpunt op de lijn $k$: $y = \frac{1}{2}x - 2$ ligt, die straal 3 hebben en die de $x$-as raken.
Stel van zowel $c_1$ als $c_2$ een vergelijking op.




**figuur 7.12**

*Uitwerking*
De cirkels raken de $x$-as en straal = 3, dus $y_M = -3$ of $y_M = 3$.

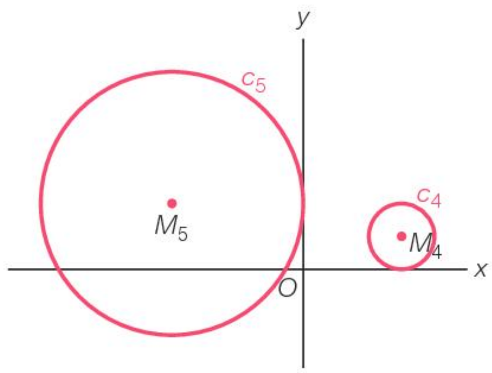
$y_M = -3$ en $M$ op $k$ geeft $\frac{1}{2}x_M - 2 = -3$
$\frac{1}{2}x_M = -1$
$x_M = -2$

Dus $M_1(-2, -3)$ en $c_1$: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

$y_M = 3$ en $M$ op $k$ geeft $\frac{1}{2}x_M - 2 = 3$
$\frac{1}{2}x_M = 5$
$x_M = 10$

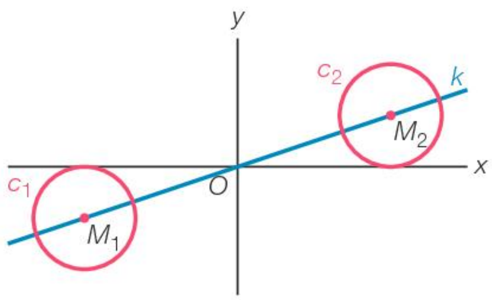
Dus $M_2(10, 3)$ en $c_2$: $(x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

**40** Stel een vergelijking op van de cirkel
- **a** $c_1$ met middelpunt $M_1(2, -5)$ en straal 3
- **b** $c_2$ met middelpunt $M_2(3, 4)$ die door de oorsprong gaat
- **c** $c_3$ met middelpunt $M_3(-3, 5)$ die door het punt $A(-1, 2)$ gaat
- **d** $c_4$ met middelpunt $M_4(3, 1)$ die de $x$-as raakt
- **e** $c_5$ met middelpunt $M_5(-4, 2)$ die de $y$-as raakt.



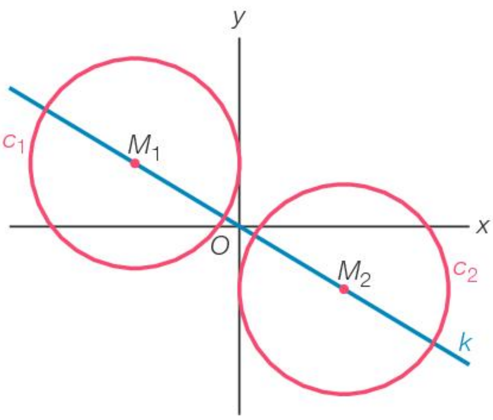

**figuur 7.13**

**41** Gegeven is de lijn $k$: $y = \frac{1}{3}x$.
Er zijn twee cirkels $c_1$ en $c_2$ waarvan het middelpunt op $k$ ligt, die straal 2 hebben en die de $x$-as raken.
Stel van zowel $c_1$ als $c_2$ een vergelijking op.




**figuur 7.14**

**42** Er zijn twee cirkels $c_1$ en $c_2$ waarvan het middelpunt op de lijn $k$: $y = -\frac{3}{5}x$ ligt, die straal 10 hebben en die de $y$-as raken.
Stel van zowel $c_1$ als $c_2$ een vergelijking op.




**figuur 7.15**

**A43** Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$ en $B(9, 1)$ en de lijn $k$: $5x + 2y = 12$.
Stel een vergelijking op van de

- **a** cirkel $c_1$ met middelpunt $A$ die de $x$-as raakt
- **b** cirkel $c_2$ met middelpunt $B$ die door $A$ gaat
- **c** cirkel $c_3$ met middellijn $AB$
- **d** cirkels $c_4$ en $c_5$ waarvan de middelpunten op $k$ liggen, die straal 2 hebben en die de $y$-as raken.

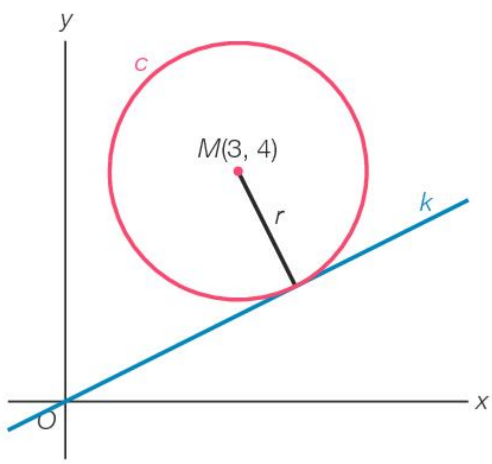
**A44** De cirkel $c$ gaat door de punten $P(-1, p)$, $Q(-2, 6)$ en $R(5, 7)$.
Bereken $p$ op algebraïsche wijze in het geval

- **a** $QR$ een middellijn van $c$ is
- **b** $PR$ een middellijn van $c$ is.

**E45** Gegeven is de cirkel $c$ met middelpunt $M(p, q)$ en straal $\sqrt{13}$.
$c$ gaat door de punten $A(4, -1)$ en $B(-1, -2)$.
Bereken algebraïsch $p$ en $q$.

**46** Gegeven is de lijn $k$: $x - 2y = 0$. De cirkel $c$ met middelpunt $M(3, 4)$ raakt $k$. Zie de figuur hiernaast.
Bij $c$ hoort een vergelijking van de vorm $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$.

- **a** Licht dit toe.
- **b** Bereken $d(M, k)$ en geef een vergelijking van $c$.

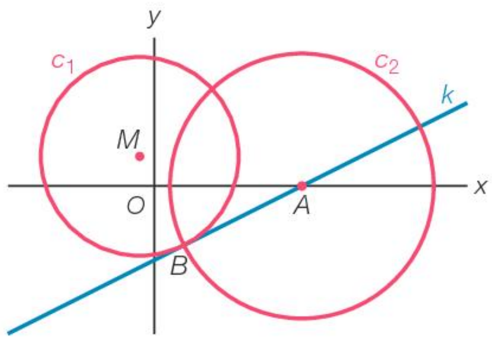



**figuur 7.16** $d(M, k) = r$

**47**
- **a** Stel een vergelijking op van de cirkel $c_1$ met middelpunt $M_1(5, 3)$ die de lijn $k$: $y = x$ raakt.
- **b** Stel een vergelijking op van de cirkel $c_2$ met middelpunt $M_2(-1, 3)$ die de lijn $m$: $x + 2y = 0$ raakt.

**A48** Gegeven is de lijn $k$: $2x + 3y = 12$ die de $x$-as snijdt in het punt $A$ en de $y$-as snijdt in het punt $B$.
Stel een vergelijking op van de
- **a** cirkel $c_1$ met middelpunt $M_1(8, 3)$ die $k$ raakt
- **b** cirkels $c_2$ en $c_3$ waarvan de middelpunten op $k$ liggen, die straal 8 hebben en die de $x$-as raken
- **c** cirkel $c_4$ met middellijn $AB$.

**A49** Gegeven is de lijn $k$: $x - 2y = 10$ die de $x$-as snijdt in het punt $A$. Cirkel $c_1$ met middelpunt $M(-1, 2)$ raakt $k$ in het punt $B$. Cirkel $c_2$ met middelpunt $A$ gaat door $B$. Zie de figuur hiernaast.
- **a** Stel van zowel $c_1$ als $c_2$ een vergelijking op.
- **b** Stel een vergelijking op van de cirkel $c_3$ waarvan $AM$ een middellijn is en onderzoek of $c_3$ door $B$ gaat.




**figuur 7.17**

**E50** Er zijn twee cirkels met straal 5 die de lijn $k$: $3x - 4y = 10$ raken in het punt $A(2, -1)$.
Stel van elk van deze cirkels een vergelijking op.

**O51** Gegeven is de cirkel $c$ met middelpunt $M(4, -1)$ en straal 6.
Stel van $c$ een vergelijking op en herleid deze tot de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

## Theorie B De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

In opgave 51 heb je gezien dat bij de cirkel met middelpunt $M(4, -1)$ en straal 6 de vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$ hoort. De vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$ is van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Heb je te maken met een cirkel waarvan de vergelijking is gegeven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, dan krijg je met kwadraatafsplitsen een vergelijking van de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ waaruit de straal en de coördinaten van het middelpunt zijn af te lezen.
Bij de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ gaat dat als volgt.
$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$
Dus van de cirkel met vergelijking
$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$
is het middelpunt $(-3, 2)$ en de straal 4.

$x^2 + 6x =$
$x^2 + 6x + 9 - 9 =$
$(x + 3)^2 - 9$

$y^2 - 4y =$
$y^2 - 4y + 4 - 4 =$
$(y - 2)^2 - 4$

Merk op dat niet elke vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ een cirkel voorstelt. Zo is $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 15 = 0$ te schrijven als $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -2$, en dit is niet de vergelijking van een cirkel.

**Voorbeeld**

Bereken van de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$ de straal en de coördinaten van het middelpunt.

*Uitwerking*

$x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$
$x^2 + 8x + y^2 - 3y + 6 = 0$
$(x + 4)^2 - 16 + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$
$(x + 4)^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$

Dus de straal is $\sqrt{12\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $(-4, 1\frac{1}{2})$.

**52** Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.

**a** $c_1$: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
**b** $c_2$: $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
**c** $c_3$: $x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
**d** $c_4$: $x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$

**53** Gegeven zijn de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ en de punten $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$ en $C(-2, 1)$. Van $c$ is het middelpunt $M(-3, 4)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.

**a** Toon dit aan.
**b** Bereken $d(A, M)$. Ligt $A$ op, binnen of buiten $c$? Licht toe.
**c** Bereken $d(B, M)$. Ligt $B$ op, binnen of buiten $c$? Licht toe.
**d** Ligt $C$ op, binnen of buiten $c$? Licht toe.

**A54** Onderzoek met een berekening of

**a** het punt $A(-1, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_1$: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ligt
**b** de oorsprong op, binnen of buiten de cirkel $c_2$: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$ ligt
**c** het punt $B(1, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_3$: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ ligt.

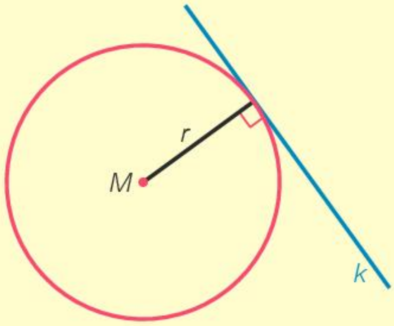
**A55**
**a** Bereken algebraïsch voor welke $p$ het punt $P(1, p)$ binnen de cirkel $c_1$: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ ligt.
**b** Bereken algebraïsch voor welke $q$ het punt $Q(1, 5)$ buiten de cirkel $c_2$: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$ ligt.

**E56** Van de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + ax + by = 71$ is de straal 10 en ligt het middelpunt op de lijn $k$: $x + 2y = 1$.
Bereken $a$ en $b$ algebraïsch.

# Terugblik

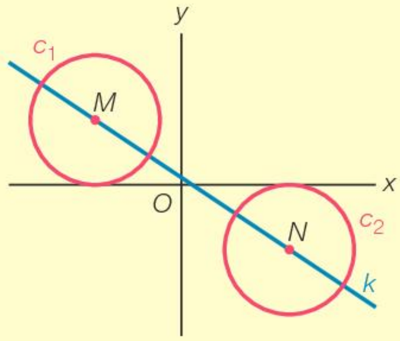
### De cirkelvergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

De cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal $r$ heeft vergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. In de figuur hiernaast geldt $d(M, k) = r$.




Is van cirkel $c$ gegeven dat $M(-2, 4)$ het middelpunt is, dan hoort bij $c$ een vergelijking van de vorm $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = r^2$. Is verder gegeven dat $c$ door het punt $A(1, 2)$ gaat, dan is
$r = d(A, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.
Dus $c$: $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$.

Gegeven is de lijn $k$: $2x + 3y = 1$.
Er zijn twee cirkels $c_1$ en $c_2$ waarvan de middelpunten $M$ en $N$ op $k$ liggen, die straal 3 hebben en die de $x$-as raken.
Zie de figuur hiernaast.




$c_1$ raakt de $x$-as en de straal van $c_1$ is 3, dus $y_M = 3$.
$M$ ligt op $k$ en $y_M = 3$ geeft $2x_M + 3 \cdot 3 = 1$, en hieruit volgt $x_M = -4$.
Dus $c_1$: $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
$c_2$ raakt de $x$-as en de straal van $c_2$ is 3, dus $y_N = -3$.
$N$ ligt op $k$ en $y_N = -3$ geeft $2x_N + 3 \cdot -3 = 1$, en hieruit volgt $x_N = 5$.
Dus $c_2$: $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

### De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Om de vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ te herleiden tot de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ ga je kwadraatafsplitsen.
Je krijgt $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

Je hebt dus te maken met de cirkel met middelpunt $M(5, 2)$ en straal $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Om na te gaan of het punt $A(1, 6)$ binnen, op, of buiten de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ ligt, gebruik je de afstand van $A$ tot $M(5, 2)$.
$d(A, M) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
Omdat $d(A, M) > r$ ligt $A$ buiten $c$.

# 7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

**057**

Gegeven zijn de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ en de punten $P(1, 6)$ en $Q(6, -2)$.
Van $c$ is het middelpunt $M(5, 3)$ en de straal $r = 4$.

**a** Toon dit aan.

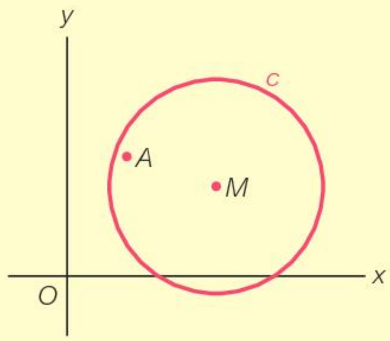
$P$ en $Q$ liggen buiten $c$.

**b** Toon dit aan.

**c** Is de afstand van $P$ tot $c$ groter of kleiner dan de afstand van $Q$ tot $c$? Licht toe.

## Theorie A Afstanden bij cirkels

In figuur 7.18 is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ met middelpunt $M(5, 3)$ en straal 4 van opgave 57 getekend.
Verder zie je het punt $A(2, 4)$.
Om de afstand van het punt $A$ tot de cirkel te berekenen, gebruik je dat de afstand van $A$ tot $c$ gelijk is aan de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen $A$ en $c$.



**figuur 7.18**

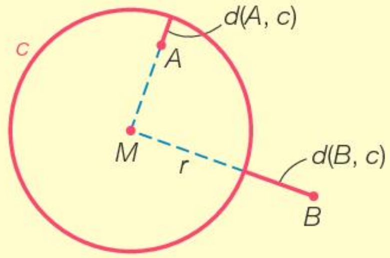
**De afstand van een punt tot een kromme is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen het punt en de kromme.**

Dit betekent dat in figuur 7.18 de afstand van $A$ tot $c$, dus $d(A, c)$, gelijk is aan $d(M, c) - d(A, M)$, oftewel $d(A, c) = r - d(A, M)$.
Omdat $r = 4$ en $d(A, M) = \sqrt{(5-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$ is $d(A, c) = 4 - \sqrt{10}$.

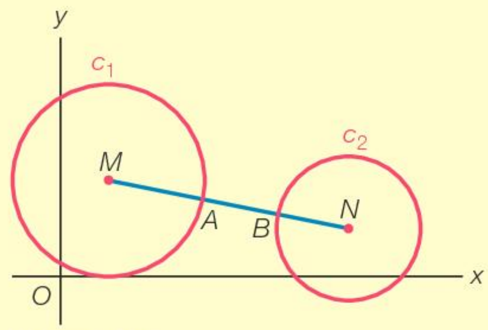
Als je te maken hebt met een punt $B$ buiten $c$, dan is $d(B, c) = d(B, M) - r$.
Omdat in figuur 7.18 geldt $d(O, M) = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ is $d(O, c) = \sqrt{34} - 4$.

**De afstand van een punt tot een cirkel $c$ met middelpunt $M$ en straal $r$**

**Voor punt $A$ binnen $c$ geldt $d(A, c) = r - d(A, M)$.**
**Voor punt $B$ buiten $c$ geldt $d(B, c) = d(B, M) - r$.**

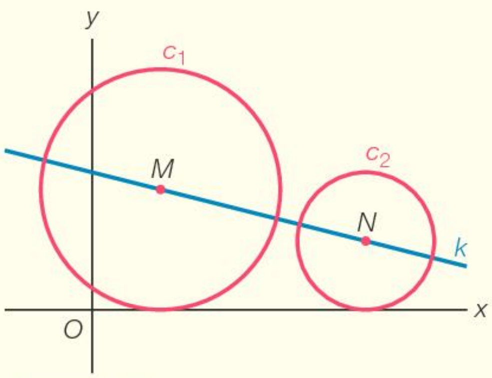


In figuur 7.19 zie je de cirkel $c_1$ met middelpunt $M(1, 2)$ en straal $r_1 = 2$ en de cirkel $c_2$ met middelpunt $N(6, 1)$ en straal $r_2 = 1\frac{1}{2}$.
Het lijnstuk $MN$ snijdt $c_1$ in het punt $A$ en $c_2$ in het punt $B$. De lengte van het lijnstuk $AB$ is de afstand tussen $c_1$ en $c_2$, dus $d(c_1, c_2) = d(A, B)$.
Er geldt $d(c_1, c_2) = d(M, N) - d(A, M) - d(B, N)$.
Omdat $d(M, N) = \sqrt{(6-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$,
$d(A, M) = r_1 = 2$ en $d(B, N) = r_2 = 1\frac{1}{2}$, is
$d(c_1, c_2) = \sqrt{26} - 2 - 1\frac{1}{2} = \sqrt{26} - 3\frac{1}{2}$.



**figuur 7.19**

**Voorbeeld**
Op de lijn $k$: $x + 4y = 16$ ligt het punt $M$ met $x_M = 2$ en het punt $N$ met $x_N = 8$. De cirkels $c_1$ met middelpunt $M$ en $c_2$ met middelpunt $N$ raken de $x$-as.
Bereken exact de afstand tussen $c_1$ en $c_2$.

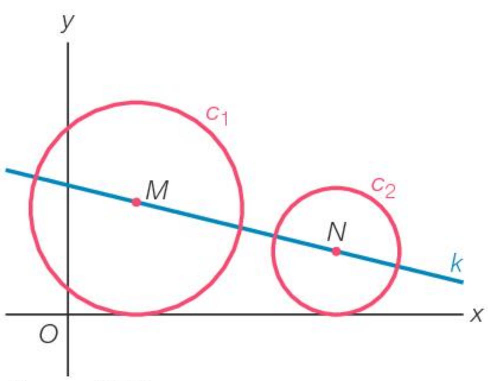


**figuur 7.20**

*Uitwerking*
$M$ op $k$, dus $2 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 3\frac{1}{2}$.
Dus de straal $r_1$ van $c_1$ is $3\frac{1}{2}$ en $M(2, 3\frac{1}{2})$.
$N$ op $k$, dus $8 + 4y_N = 16$ en dit geeft $y_N = 2$.
Dus de straal $r_2$ van $c_2$ is 2 en $N(8, 2)$.
$d(M, N) = \sqrt{(8-2)^2 + (2 - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{36 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{38\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{153}$
Dus $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{153} - 3\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}\sqrt{153} - 5\frac{1}{2}$.

**58** Gegeven zijn de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ en de punten $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$ en $C(9, 4)$.
Bereken exact.
**a** $d(A, c)$ **b** $d(B, c)$ **c** $d(C, c)$

**59** Op de lijn $k$: $x + 4y = 16$ ligt het punt $M$ met $x_M = 2$ en het punt $N$ met $x_N = 8$. De cirkels $c_1$ met middelpunt $M$ en $c_2$ met middelpunt $N$ raken de $x$-as.
Bereken exact de afstand tussen $c_1$ en $c_2$.



**figuur 7.21**

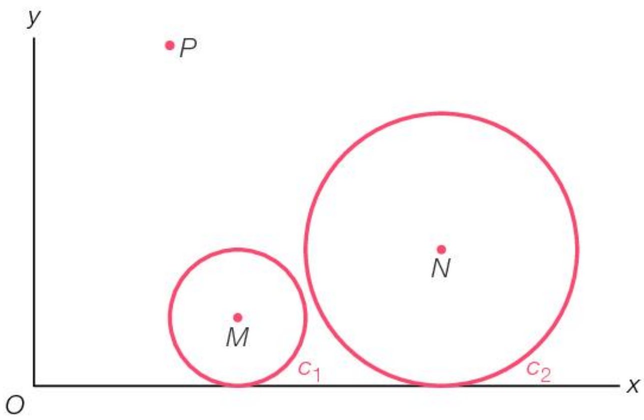
**60** Gegeven zijn de cirkels
$c_1$: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ en
$c_2$: $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$ en het punt $P(2, 5)$. Zie figuur 7.22.

**a** Bereken exact $d(c_1, c_2)$.

De lijn $l$: $3x - 4y = 0$ raakt beide cirkels.

**b** Toon met berekeningen aan dat dit klopt.

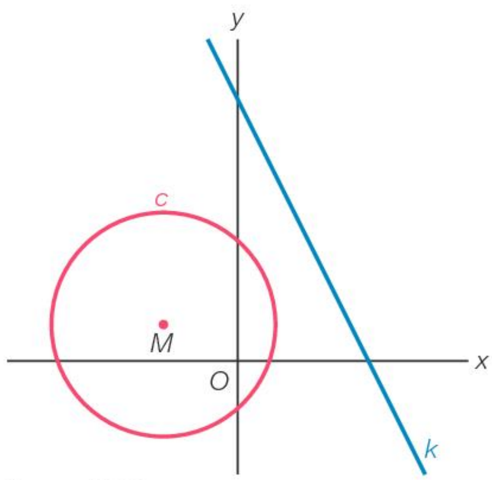
**c** Stel een vergelijking op van de cirkel $c_3$ met middelpunt $P$ die $l$ raakt.



**figuur 7.22**

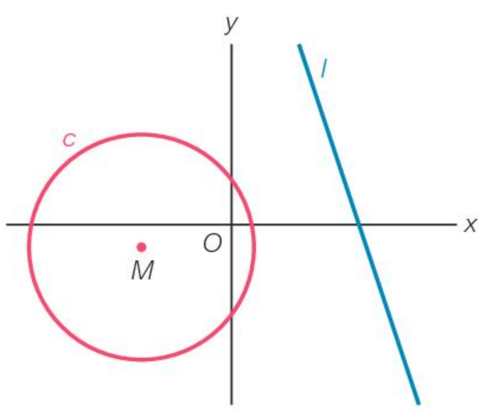
**A61** Gegeven zijn de lijn $k$: $4x - 3y = 0$ en de punten $M(4, 2)$ en $N(9, -10)$.
De cirkel $c_1$ heeft middelpunt $M$ en raakt $k$.
De cirkel $c_2$ heeft middelpunt $N$ en straal $r$.
Er geldt $d(c_1, c_2) = 2r$.
Stel een vergelijking op van $c_2$.

**62** Gegeven zijn de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ met middelpunt $M$ en de lijn $k$: $2x + y = 7$. Zie figuur 7.23.
De afstand van de lijn $k$ tot de cirkel $c$ is gelijk aan $2\sqrt{5} - 3$.
Toon dit aan.



**figuur 7.23**

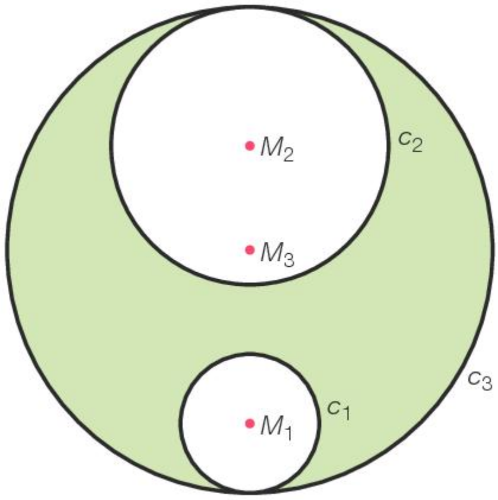
**A63** Gegeven zijn de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$ en de lijn $l$: $y = -3x + 17$. Zie figuur 7.24.
Onderzoek op algebraïsche wijze of de afstand van $l$ tot $c$ groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de straal van $c$.



**figuur 7.24**

**E64** *

Hiernaast zie je het ontwerp van een oorbel.
In cirkel $c_3$ zijn de cirkels $c_1$ en $c_2$ getekend waarbij $c_1$ en $c_2$ raken aan $c_3$ en de middelpunten van de drie cirkels op één lijn liggen.
De verhouding van de middellijnen van de cirkels is 2 : 4 : 7.
De oppervlakte van het gekleurde gebied is π.
Bereken exact $d(c_1, c_2)$.



**figuur 7.25**

**O65**

Gegeven zijn de cirkel $c$: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ en het punt $A(5, 2)$ op $c$. De lijn $k$ raakt $c$ in $A$. Zie figuur 7.26.

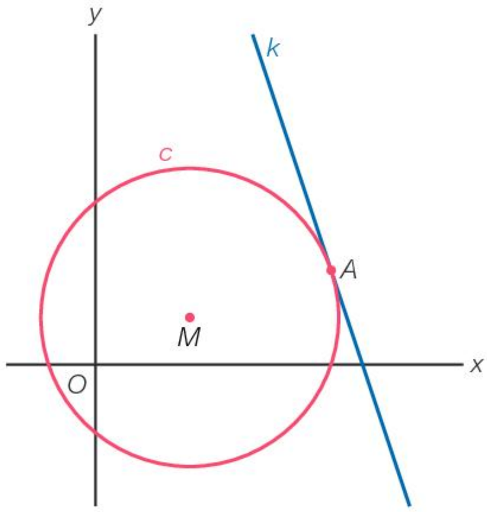
**a** Hoe kun je controleren dat $A$ op $c$ ligt?

De lijn $l$ gaat door $M$ en $A$.

**b** Bereken de richtingscoëfficiënt $rc_l$ van $l$.

De lijn $k$ staat loodrecht op $l$.

**c** Stel een vergelijking van $k$ op.



**figuur 7.26**

## Theorie B Raaklijn aan cirkel in gegeven raakpunt

In opgave 65 heb je een vergelijking opgesteld van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven raakpunt.
Je kunt bij dit soort situaties het volgende werkschema gebruiken.

**Werkschema: opstellen van een vergelijking van een raaklijn *k* aan een cirkel *c* met middelpunt *M* in een gegeven punt *A* op *c***

1. Bereken de richtingscoëfficiënt $rc_l$ van de lijn $l$ door $M$ en $A$.
2. Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt $rc_k$ van $k$ te berekenen.
3. Gebruik $rc_k$ en de coördinaten van $A$ om een vergelijking van $k$ op te stellen.

**Voorbeeld**

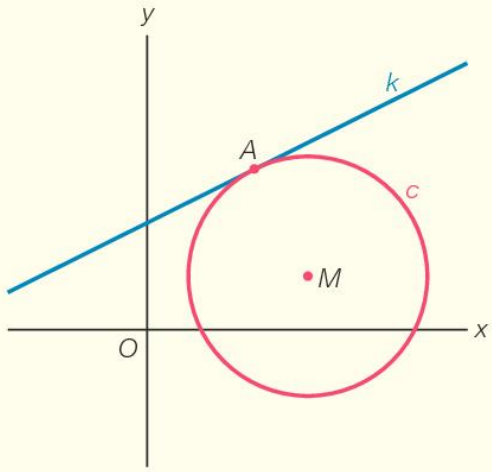
Het punt $A(2, 3)$ ligt op de cirkel
$c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.
Stel een vergelijking op van de lijn $k$ die $c$ raakt in $A$.

*Uitwerking*

Stel $k: y = ax + b$.
$M(3, 1)$ is het middelpunt van $c$.
Lijn $m$ door $M$ en $A$ heeft $\text{rc}_m = \dfrac{3-1}{2-3} = -2$,
dus $a = \text{rc}_k = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} k: y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3 \\ 1 + b = 3 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.



figuur 7.27

**66** Zie het voorbeeld met de cirkel $c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

**a** Stel een vergelijking op van de lijn $l$ die $c$ raakt in het punt $B(2, -1)$.

**b** Toon aan dat de lijn $n: y = 2x$ raakt aan $c$.

**c** $c$ snijdt de $x$-as in de punten $C$ en $D$ met $x_C < x_D$.
Stel een vergelijking op van de lijn $p$ die $c$ raakt in $C$.

GESCHIEDENIS

## Analytische meetkunde

Meetkunde waarbij de principes van algebra, vaak in combinatie met assenstelsels, worden gebruikt wordt analytische meetkunde genoemd. Met de coördinaten van het assenstelsel worden vergelijkingen van bijvoorbeeld lijnen en cirkels opgesteld. Een assenstelsel wordt ook wel een *Cartesisch coördinatenstelsel* genoemd en dankt zijn naam aan René Descartes (1596-1650). Veel wiskundigen zijn van mening dat de introductie van de analytische meetkunde door Descartes het begin van de moderne wiskunde is. In 1637 publiceerde Descartes het belangrijke *Discours de la Méthode*. In het bijbehorende essay *La Géométrie* formuleerde hij de volgende drie stellingen:


René Descartes

1 Ieder vraagstuk over grootheden kan teruggebracht worden tot een meetkundig probleem.
2 Ieder meetkundig probleem kan worden teruggebracht tot een algebraïsch probleem.
3 Ieder algebraïsch probleem kan worden teruggebracht tot het oplossen van één of meer vergelijkingen.

**67** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$.
De punten $A$ en $B$ met $x_A = x_B = 3$ en $y_A > y_B$ liggen op $c$.
De lijn $k$ raakt $c$ in $A$ en de lijn $l$ raakt $c$ in $B$.

**a** Stel van $k$ en van $l$ een vergelijking op.
**b** Bereken $\angle(k, l)$. Rond af op gehelen.
**c** Er zijn twee raaklijnen aan $c$ die door de oorsprong gaan.
Bereken de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken.
Rond af op gehelen.

**68** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$.
$c$ snijdt de $x$-as in de punten $A$ en $B$ met $x_A < x_B$.
De lijn $k$ raakt $c$ in $A$ en de lijn $l$ raakt $c$ in $B$.

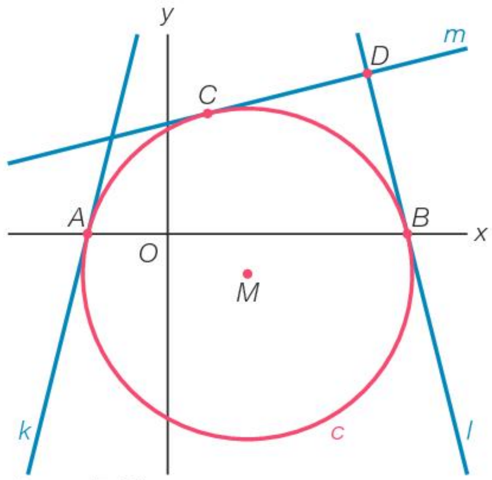
**a** Stel van $k$ en van $l$ een vergelijking op.

$c$ snijdt de $y$-as in de punten $C$ en $D$ met $y_C < y_D$.
De lijn $p$ raakt $c$ in $C$ en de lijn $q$ raakt $c$ in $D$.

**b** Stel van $p$ en van $q$ een vergelijking op.
**c** Onderzoek met een berekening of de hoek tussen $k$ en $l$ groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de hoek tussen $p$ en $q$.

**A69** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$ met middelpunt $M$.
$c$ snijdt de negatieve $x$-as in het punt $A$ en de positieve $x$-as in het punt $B$. Verder ligt het punt $C(1, 3)$ op $c$.
De lijn $k$ raakt $c$ in $A$, de lijn $l$ raakt $c$ in $B$ en de lijn $m$ raakt $c$ in $C$. De lijnen $l$ en $m$ snijden elkaar in het punt $D$. Zie figuur 7.28.

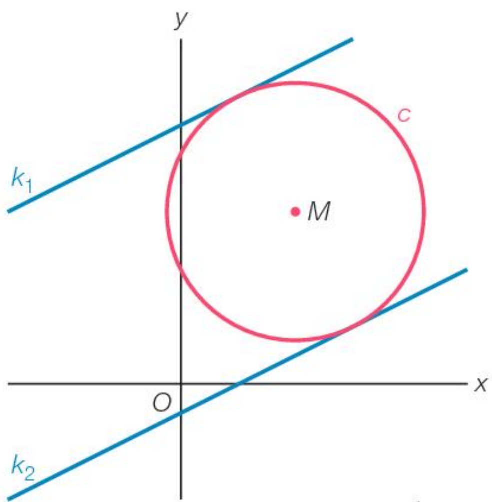
**a** Bereken $\angle(k, m)$. Rond af op gehelen.
**b** Bereken in graden nauwkeurig $\angle AMB$.
**c** Bereken exact de afstand van $D$ tot $c$.



**figuur 7.28**

**O70** Gegeven is de cirkel $c$: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ met middelpunt $M$. De lijn $k$: $y = \frac{1}{2}x + b$ raakt $c$.

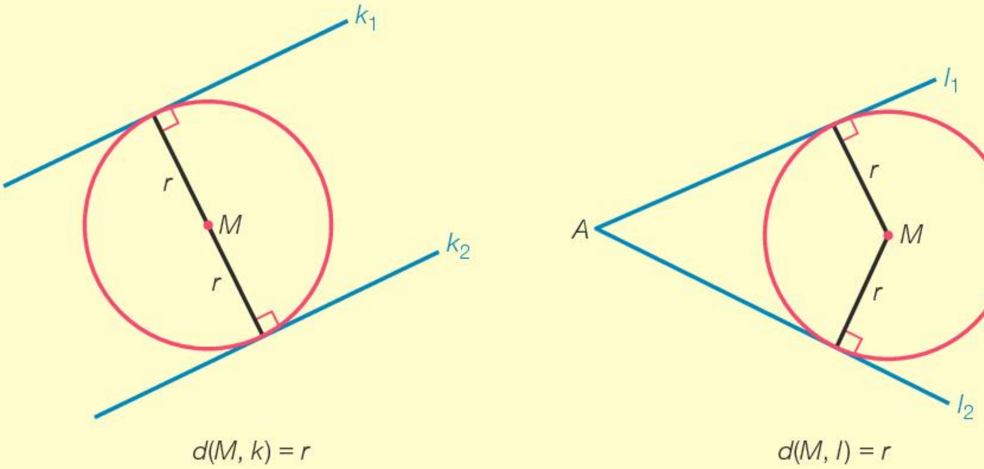
**a** Licht toe dat $d(M, k) = \sqrt{5}$.
**b** De vergelijking van $k$ is te herleiden tot $x - 2y + 2b = 0$.
Licht dit toe.
**c** Licht toe dat $|2b - 4| = 5$.
**d** Geef vergelijkingen van de lijnen $k_1$ en $k_2$ die $c$ raken en richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ hebben.



**figuur 7.29** De lijnen $k$ met $rc_k = \frac{1}{2}$ raken de cirkel $c$: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

## Theorie C Raaklijnen aan cirkels

In opgave 70 heb je vergelijkingen opgesteld van de lijnen $k$ met een gegeven richtingscoëfficiënt die de cirkel met middelpunt $M$ en straal $r$ raken. Je gebruikte daarbij dat $d(M, k) = r$.
In het voorbeeld worden vergelijkingen opgesteld van de lijnen $l$ die een cirkel met middelpunt $M$ en straal $r$ raken en door een punt buiten de cirkel gaan. Daarbij wordt gebruikt dat $d(M, l) = r$.




**figuur 7.30**

### Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c$: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ en het punt $A(9, 2)$.
Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die door $A$ gaan en $c$ raken.

*Uitwerking*
Van $c$ is $M(2, 3)$ en $r = 5$.
Stel $l$: $y = ax + b$.
$A(9, 2)$ op $l$ geeft $9a + b = 2$, dus $b = 2 - 9a$.
$l$: $y = ax + 2 - 9a$ oftewel $l$: $ax - y + 2 - 9a = 0$

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|2a - 3 + 2 - 9a|}{\sqrt{a^2+1}} = 5$$

$$|-7a - 1| = 5\sqrt{a^2+1}$$
$$49a^2 + 14a + 1 = 25a^2 + 25$$
$$24a^2 + 14a - 24 = 0$$
$$12a^2 + 7a - 12 = 0$$
$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot -12 = 625$$
$$a = \frac{-7+25}{24} = \frac{3}{4} \vee a = \frac{-7-25}{24} = -1\tfrac{1}{3}$$

$a = \frac{3}{4}$ geeft $b = 2 - 9 \cdot \frac{3}{4} = -4\frac{3}{4}$, dus $l_1$: $y = \frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}$.
$a = -1\frac{1}{3}$ geeft $b = 2 - 9 \cdot -1\frac{1}{3} = 14$, dus $l_2$: $y = -1\frac{1}{3}x + 14$.

**71** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 = 10$ en het punt $A(10, 0)$.
Stel vergelijkingen op van de lijnen

**a** $l$ met richtingscoëfficiënt 3 die $c$ raken
**b** $m$ die door $A$ gaan en $c$ raken.

**72** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 = 17$.

**a** Stel een vergelijking op van de lijn $k$ die $c$ raakt in het punt $A(-4, -1)$.
**b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $m$ die $c$ raken en loodrecht staan op de lijn $l$: $4x - y = 3$.
**c** Stel vergelijkingen op van de lijnen $n$ die door het punt $B(0, 17)$ gaan en $c$ raken.

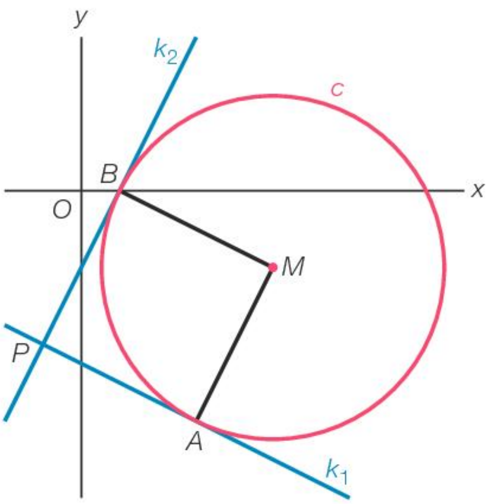
**73** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$.

**a** Stel een vergelijking op van de lijn $k$ die $c$ raakt in het punt $A(4, 5)$.
**b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ met richtingscoëfficiënt 3 die $c$ raken.
**c** Stel vergelijkingen op van de lijnen $m$ die door het punt $B(9, 0)$ gaan en $c$ raken.

**A74** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$.

**a** Stel een vergelijking op van de lijn $k$ die $c$ raakt in het punt $A(-3, 1)$.
**b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die $c$ raken en loodrecht staan op de lijn $m$: $4x - y = 1$.
**c** Stel vergelijkingen op van de lijnen $n$ die door het punt $B(6, -1)$ gaan en $c$ raken.

**A75** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0$ met middelpunt $M$ en het punt $P(-1, -4)$. De lijnen $k_1$ en $k_2$ door $P$ raken $c$ in de punten $A$ en $B$. Zie figuur 7.31.

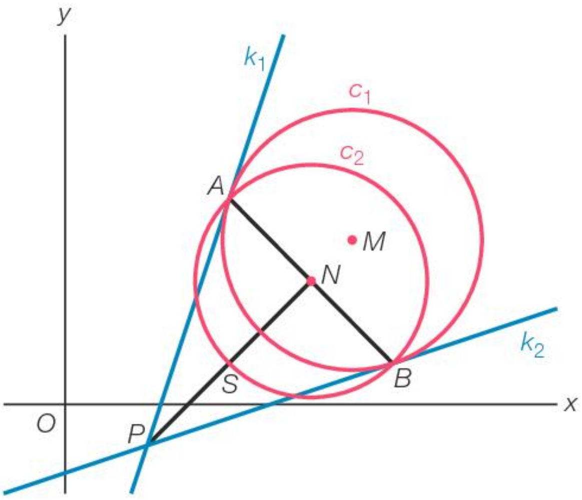



**figuur 7.31**

Bewijs dat $AMBP$ een vierkant is.

**A76** *

Gegeven zijn de cirkel $c_1$: $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 55 = 0$ en het punt $P(2, -1)$. De lijnen $k_1$ en $k_2$ door $P$ raken $c_1$ in de punten $A$ en $B$. Het lijnstuk $AB$ is een middellijn van cirkel $c_2$. Het middelpunt van $c_2$ is het punt $N$. De cirkel $c_2$ snijdt het lijnstuk $NP$ in het punt $S$. Zie figuur 7.32.

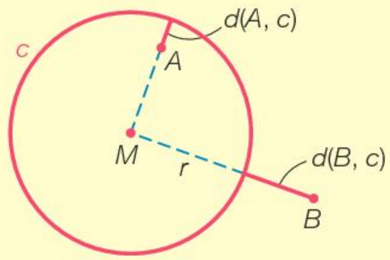



**figuur 7.32**

Onderzoek met exacte berekeningen of $S$ het midden is van $NP$.

# Terugblik

## Afstanden bij cirkels




Voor een punt $A$ binnen cirkel $c$ met middelpunt $M$ en straal $r$ geldt $d(A, c) = r - d(A, M)$.
Voor een punt $B$ buiten cirkel $c$ met middelpunt $M$ en straal $r$ geldt $d(B, c) = d(B, M) - r$.
Bij de cirkel $c$: $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 17$ en de punten $A(4, 3)$ en $B(10, 5)$ geldt
$d(A, M) = \sqrt{(6-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$, $d(A, c) = \sqrt{17} - \sqrt{5}$,
$d(B, M) = \sqrt{(6-10)^2 + (2-5)^2} = 5$ en $d(B, c) = 5 - \sqrt{17}$.

## Raaklijnen aan cirkels

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn $k$ die de cirkel $c$: $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 17$ raakt in het punt $A(2, 3)$, ga je als volgt te werk.

1 $M(6, 2)$, dus van de lijn $l$ door $M$ en $A$ is $\text{rc}_l = \dfrac{3-2}{2-6} = -\frac{1}{4}$.
2 Uit $\text{rc}_l = -\frac{1}{4}$ en $k \perp l$ volgt $\text{rc}_k = 4$.
3 $k$: $y = 4x + b$ door $A(2, 3)$ geeft $4 \cdot 2 + b = 3$ oftewel $b = -5$.
Dus $k$: $y = 4x - 5$.

Je kunt de afstandsformule handig gebruiken voor het opstellen van vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels als
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijnen is gegeven
- een punt buiten de cirkel is gegeven waar de raaklijnen doorheen gaan.

**Afstandsformule**
$P(x_P, y_P)$ en $k$: $ax + by = c$
$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Om vergelijkingen van de lijnen $l$ op te stellen die door het punt $A(10, 1)$ gaan en de cirkel $c$: $(x-5)^2 + y^2 = 13$ raken, stel je $l$: $y = ax + b$.
$A(10, 1)$ op $l$ geeft $10a + b = 1$ oftewel $b = 1 - 10a$, en dit geeft
$l$: $y = ax + 1 - 10a$ oftewel $l$: $ax - y + 1 - 10a = 0$.
De cirkel heeft middelpunt $M(5, 0)$ en straal $r = \sqrt{13}$.

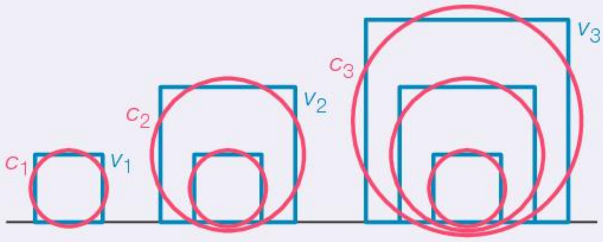
$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|5a - 0 + 1 - 10a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{13}$$
$$|-5a + 1| = \sqrt{13a^2 + 13}$$
$$25a^2 - 10a + 1 = 13a^2 + 13$$
$$12a^2 - 10a - 12 = 0$$
$$6a^2 - 5a - 6 = 0$$
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -6 = 169$$
$$a = \frac{5 + 13}{12} = 1\tfrac{1}{2} \vee a = \frac{5 - 13}{12} = -\tfrac{2}{3}$$

$a = 1\frac{1}{2}$ geeft $b = -14$, dus $l_1$: $y = 1\frac{1}{2}x - 14$.
$a = -\frac{2}{3}$ geeft $b = 7\frac{2}{3}$, dus $l_2$: $y = -\frac{2}{3}x + 7\frac{2}{3}$.

# **Eindopdracht** Cirkels en vierkanten met gelijke oppervlakte

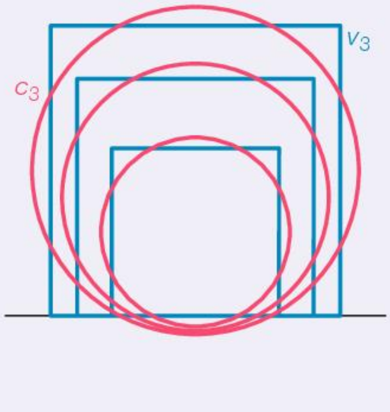
In de beginopdracht heb je kunnen lezen dat de kwadratuur van de cirkel niet bestaat. Dat wil zeggen dat je bij een gegeven cirkel geen vierkant kunt construeren waarvan de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van de cirkel. Met construeren wordt de manier van tekenen bedoeld waarbij je slechts een potlood, een passer en een rechte lat gebruikt.
Met behulp van rekenen en meten kun je wel een vierkant tekenen waarvan de oppervlakte bij benadering gelijk is aan de oppervlakte van een gegeven cirkel.
Heb je bijvoorbeeld een cirkel met straal 5, dan is de oppervlakte gelijk aan $25\pi$ en een vierkant met oppervlakte $25\pi$ heeft zijde $\sqrt{25\pi} = 5\sqrt{\pi} = 8{,}862269...$ Je kunt dan zo nauwkeurig mogelijk een vierkant tekenen waarvan de zijde 8,86... is.

In deze opdracht bekijken we twee situaties met rijen cirkels en bijbehorende vierkanten waarvan de oppervlakte gelijk is. We laten steeds het middelpunt van de cirkel samenvallen met het midden van het bijbehorende vierkant.




In de eerste situatie gaan we uit van vierkanten met zijde 1, 2, 3, 4, ...
We tekenen deze vierkanten zoals hiernaast. Je ziet eerst vierkant $v_1$ met zijde 1 en de bijbehorende cirkel $c_1$ waarvan de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van $v_1$. Daarnaast is ook het vierkant $v_2$ met zijde 2 en de bijbehorende cirkel $c_2$ getekend zodat een symmetrische figuur ontstaat. In de derde figuur zie je ook nog vierkant $v_3$ en cirkel $c_3$. Zo kunnen we steeds doorgaan.

- De afstand tussen twee opeenvolgende cirkels is steeds gelijk. Toon dit aan en bereken deze afstand. Geef zowel een exact antwoord als een afronding op drie decimalen.




De tweede situatie zie je hiernaast. We gaan uit van cirkels waarvan de oppervlakte achtereenvolgens $\pi$, $2\pi$, $3\pi$, $4\pi$, ... is. De eerste cirkel is $c_1$ en het eerste vierkant is $v_1$.
Beide hebben oppervlakte $\pi$.
In deze situatie worden de afstanden tussen twee opeenvolgende cirkels steeds kleiner.

- Bereken tussen welke twee opeenvolgende cirkels de afstand voor het eerst kleiner is dan 0,01.

# Diagnostische toets

## 7.1 Lijnen en hoeken

**1** Gegeven zijn de lijnen $k_{p,q}$: $px - 3y = q$ en $l_p$: $-4x + py = 8$.
Bereken voor welke $p$ en $q$ de lijnen $k_{p,q}$ en $l_p$
- **a** een snijpunt hebben
- **b** evenwijdig zijn
- **c** elkaar snijden in het punt (2, 8).

**2** De lijn $k$ snijdt de assen in de punten $(2p, 0)$ en $(0, p + 1)$ en de lijn $l$ snijdt de assen in de punten (5, 0) en $(0, 2p + 3)$.
Bereken voor welke $p$
- **a** het punt $A(8, -3)$ op $k$ ligt
- **b** $l$ evenwijdig is met de lijn door de punten (2, 0) en (0, 3)
- **c** $k$ en $l$ evenwijdig zijn.

**3** Bereken de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.
- **a** $k$: $y = 4x + 2$ en $l$: $y = -\frac{1}{2}x + 6$
- **b** $m$ door (3, 0) en (0, −2) en $n$ door (2, 0) en (0, 5)
- **c** $p$: $2x + 3y = 6$ en $q$: $y = -8x - 6$

## 7.2 Afstanden bij punten en lijnen

**4** Gegeven zijn de punten $A(2p, 0)$ en $B(3, p + 1)$.
Voor de afstand tussen $A$ en $B$ geldt $d(A, B) = \sqrt{5p^2 - 10p + 10}$.
- **a** Toon dit aan.
- **b** Bereken langs algebraïsche weg voor welke $p$ de afstand tussen $A$ en $B$ gelijk is aan 5.
- **c** Bereken voor welke $p$ het midden van lijnstuk $AB$ op de lijn $k$: $x + y = 6$ ligt.

**5** Stel een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ van de lijn
- **a** $k$ die door het punt $A(2, -4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l$: $3x + 2y = 6$
- **b** $m$ die door het punt $B(2, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $n$: $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

**6**
- **a** Bereken exact de afstand van het punt $A(2, -6)$ tot de lijn $k$: $y = \frac{1}{3}x + 10$.
- **b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die door het punt $B(4, 0)$ gaan en op afstand $\sqrt{5}$ van het punt $C(1, 1)$ liggen.

**7** Gegeven is de lijn $k$: $x + 2y = 6$.
- **a** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die afstand $2\sqrt{5}$ tot $k$ hebben.
- **b** Bereken de coördinaten van de punten $P$ op de lijn $y = x$ die afstand $\sqrt{5}$ tot $k$ hebben.

## 7.3 Cirkelvergelijkingen

**8** Gegeven zijn de punten $A(2, -3)$ en $B(8, 2)$ en de lijn $k$: $y = 3x - 6$.
Stel een vergelijking op van de cirkel

- **a** $c_1$ met middelpunt $A$ die door $B$ gaat
- **b** $c_2$ met middelpunt $B$ die de $y$-as raakt
- **c** $c_3$ met middellijn $AB$
- **d** $c_4$ met middelpunt op $k$ die de $x$-as in $C(5, 0)$ raakt.

**9** Gegeven zijn de lijn $k$: $2x + 3y = 12$ en het punt $M(7, 8)$.
Cirkel $c_1$ met middelpunt $M$ raakt $k$ in het punt $A$.
Van cirkel $c_2$ is $AM$ een middellijn.
Stel van $c_1$ en van $c_2$ een vergelijking op.

**10** Gegeven zijn de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$ en de punten $A(3, -4)$, $B(2, 5)$ en $C(8, 5)$.
Onderzoek met een berekening voor elk van de punten of het op, binnen of buiten $c$ ligt.

## 7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

**11** Gegeven zijn de lijn $k$: $3x + 4y = 18$, het punt $M(5, 7)$ en de cirkel $c_1$: $x^2 + y^2 + 10y = 0$.
Voor de cirkel $c_2$ met middelpunt $M$ geldt $d(k, c_2) = 3$.
Stel van $c_2$ een vergelijking op en bereken algebraïsch $d(c_1, c_2)$.

**12** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.
De punten $A$ en $B$ met $x_A = x_B = 4$ en $y_A > y_B$ liggen op $c$.
De lijn $k$ raakt $c$ in $A$ en de lijn $l$ raakt $c$ in $B$.

- **a** Stel van $k$ en van $l$ een vergelijking op.
- **b** Bereken de hoek tussen $k$ en $l$. Rond af op één decimaal.

**13** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$.

- **a** Stel een vergelijking op van de lijn $k$ die $c$ raakt in het punt $A(-1, 3)$.
- **b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die $c$ raken en loodrecht staan op de lijn $p$: $2x + y = 10$.
- **c** Stel vergelijkingen op van de lijnen $m$ die $c$ raken en door het punt $B(-1, -2)$ gaan.

# 8

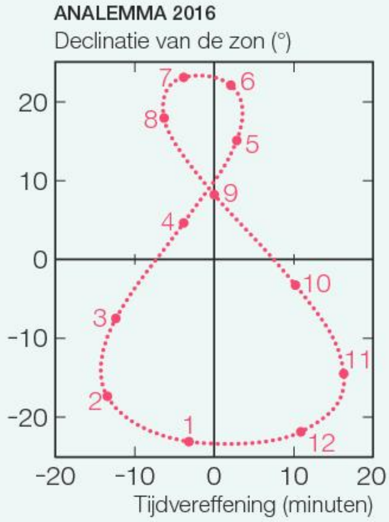
# Goniometrische functies

**Wat leer je?**

- De definities van sinus, cosinus en tangens in de eenheidscirkel.
- Rekenen met de hoekeenheid radiaal.
- Wat een sinusoïde is, hoe je deze tekent bij een gegeven formule en hoe je een formule opstelt bij een gegeven sinusoïde.
- Exact oplossen van goniometrische vergelijkingen.
- Goniometrische formules herleiden.
- Goniometrische functies differentiëren.

# **Beginopdracht** Tijdvereffening

Als je regelmatig, bijvoorbeeld om de dertig dagen, zou noteren hoe laat de zon op het hoogste punt aan de hemel staat, dan zou je ontdekken dat dit bijna nooit op hetzelfde tijdstip gebeurt. Het komt maximaal vier keer per jaar voor dat de zon op hetzelfde tijdstip op het hoogste punt aan de hemel staat.
De tijd voor de klokken in de West-Europese tijdzone is zo vastgesteld dat de zon in Greenwich *gemiddeld* om 12 uur op het hoogste punt aan de hemel staat. Deze tijd heet de *middelbare zonnetijd*.
Zo heeft elke plaats op de aarde zijn eigen middelbare zonnetijd.
De tijd die een zonnewijzer op die plaats aangeeft heet de *ware zonnetijd*.
Bij de ware zonnetijd staat de zon altijd om 12 uur op zijn hoogste punt.
Er zijn twee verschijnselen die veroorzaken dat de middelbare zonnetijd niet gelijk is aan de ware zonnetijd. Het verschil tussen deze beide tijden heet *tijdvereffening*. Op de foto op de vorige bladzijde is deze tijdvereffening in beeld gebracht. Steeds is hierin als het op de klok 12 uur 's middags is, ingetekend wat de positie van de zon is. Zonder tijdvereffening zou dit een recht lijnstuk opleveren, dat ontstaat omdat de zon in de zomer hoger staat dan in de winter. Je ziet echter een soort 8, dus er is een uitwijking naar links en naar rechts. In de figuur hiernaast is dit in een assenstelsel getekend. Deze figuur heet een *analemma*.



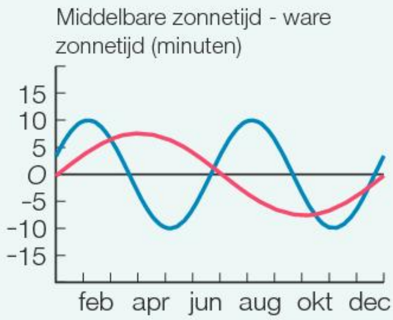

Het eerste verschijnsel dat de tijdvereffening veroorzaakt heeft te maken met het feit dat de aarde niet precies een cirkelvormige baan om de zon beschrijft, maar een licht elliptische baan. Volgens de tweede wet van Kepler heeft dit gevolgen voor de snelheid waarmee de aarde om de zon draait.

- Onderzoek hoe dit zit. Wat is de periode van dit verschijnsel?

De tweede oorzaak van de tijdvereffening heeft te maken met de schuine stand van de aardas ten opzichte van het baanvlak van de aarde.

- Onderzoek hoe dit zit. Wat is de periode van dit verschijnsel?

In de figuur hiernaast zijn de grafieken getekend die bij deze verschijnselen horen. Op de horizontale as is het jaar uitgezet en op de verticale as het verschil tussen de middelbare zonnetijd en de ware zonnetijd. De ene grafiek is rood gekleurd en de andere blauw.



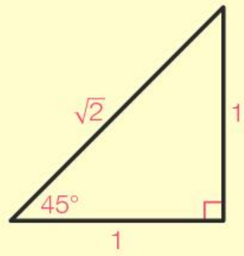

- [▸ WERKBLAD] De figuur hiernaast is ook getekend op het werkblad. De uiteindelijke tijdvereffening is de som van de twee grafieken.
  Teken de grafiek van de tijdvereffening op het werkblad en geef een schatting van het maximum en het minimum. In welke maand wordt het maximum bereikt, en in welke maand het minimum?

# Voorkennis Exacte waarden van goniometrische verhoudingen

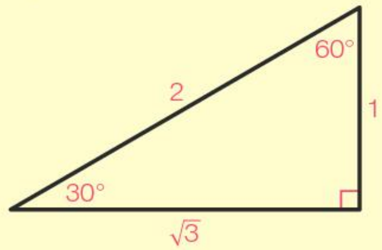
## Theorie A Hoeken van 30°, 45° en 60°

- De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.




**figuur 8.1**

- De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.




**figuur 8.2**

Hieruit volgen de exacte waarden van de goniometrische verhoudingen bij hoeken van 30°, 45° en 60°.
Uit figuur 8.1 volgt

$\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\tan(45°) = \frac{1}{1} = 1$.

Uit figuur 8.2 volgt

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ en $\tan(60°) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

We zetten deze resultaten in een tabel.

| **hoek** | **30°** | **45°** | **60°** |
|---|---|---|---|
| **sinus** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| **cosinus** | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **tangens** | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

### Voorbeeld

Bereken de exacte waarde van $\dfrac{3\tan(30^\circ)}{\tan(60^\circ) - 2\sin(30^\circ)}$.

*Uitwerking*

$$\frac{3\tan(30^\circ)}{\tan(60^\circ) - 2\sin(30^\circ)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} = 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

**1**
**a** Bewijs dat $2\sin(45^\circ) + \sqrt{6} \cdot \sin(60^\circ) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
**b** Bewijs dat $4\sin(30^\circ)\tan(30^\circ) + 2\cos(30^\circ)\cos(60^\circ) = 1\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

**2** Bereken de exacte waarde.
**a** $4\cos(30^\circ) + 9\tan(30^\circ)$
**b** $3\sin(30^\circ) - \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ)$
**c** $6\tan(30^\circ) - 3\tan(60^\circ)$
**d** $\sqrt{2} \cdot \sin(60^\circ) + 3\sqrt{3} \cdot \sin(45^\circ)$

**3** Bereken de exacte waarde.
**a** $8\sin(45^\circ)\cos(30^\circ)$
**b** $2\sqrt{3} \cdot \sin(60^\circ)\cos(30^\circ)$
**c** $\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ)\sin(60^\circ) - 2\tan(60^\circ)$
**d** $(\sin(30^\circ) + \cos(30^\circ))^2$

**4** Bereken de exacte waarde.
**a** $\dfrac{\cos(30^\circ)}{1 + \sin(60^\circ)}$
**b** $\dfrac{\sin(30^\circ) + \sin(60^\circ)}{\sin(30^\circ) - \sin(60^\circ)}$

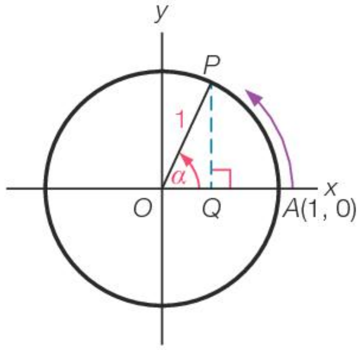
**5** Gegeven zijn de formules
$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$.
Met deze formules kun je de exacte waarde berekenen van bijvoorbeeld $\sin(15^\circ)$ en $\sin(75^\circ)$.
Voor de berekening van de exacte waarde van $\sin(15^\circ)$ kun je als volgt te werk gaan.

$$\begin{aligned}\sin(15^\circ) &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin(45^\circ)\cos(30^\circ) - \cos(45^\circ)\sin(30^\circ)\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\end{aligned}$$

**a** Je kunt de exacte waarde van $\sin(15^\circ)$ ook berekenen door te gebruiken $\sin(15^\circ) = \sin(60^\circ - 45^\circ)$.
Werk dit uit.
**b** Bereken de exacte waarde van $\sin(75^\circ)$.

# 8.1 Eenheidscirkel en radiaal

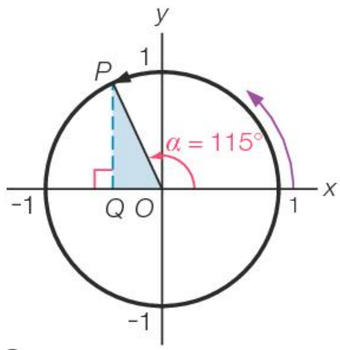
**01** Rond in deze opgave de lengten van lijnstukken en de coördinaten van punten af op twee decimalen.
In figuur 8.3 is de cirkel getekend met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Het punt $P$ draait tegen de wijzers van de klok in over de cirkel en begint daarbij in $A(1, 0)$.
De hoek waarover gedraaid is geven we aan met de Griekse letter $\alpha$. In figuur 8.3 is $\alpha = 65°$.



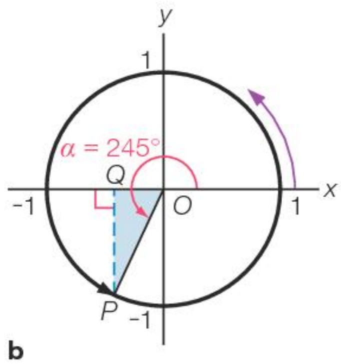
**figuur 8.3**

**a** Licht toe dat $PQ = \sin(65°)$ en $OQ = \cos(65°)$ en bereken $PQ$ en $OQ$.
**b** Geef de coördinaten van $P$.

In figuur 8.4a zie je de situatie met $\alpha = 115°$ en in figuur 8.4b die met $\alpha = 245°$.
**c** Hoeveel graden is $\angle POQ$ in figuur 8.4a? Geef $PQ$, $OQ$ en de coördinaten van $P$.
**d** Wat is het resultaat als je de GR $\cos(115°)$ en $\sin(115°)$ laat berekenen?
Vergelijk de resultaten met de coördinaten van het punt $P$ van vraag c. Wat valt je op?
**e** Zie figuur 8.4b.
Hoeveel graden is $\angle POQ$?
Geef de coördinaten van $P$.
Ga na dat je deze coördinaten op je GR kunt krijgen door $\cos(245°)$ en $\sin(245°)$ te berekenen.



**a**

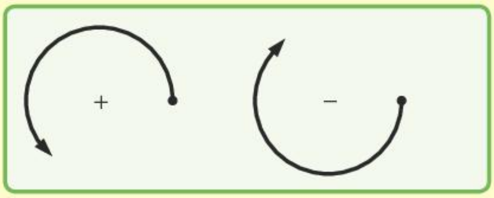


**b**

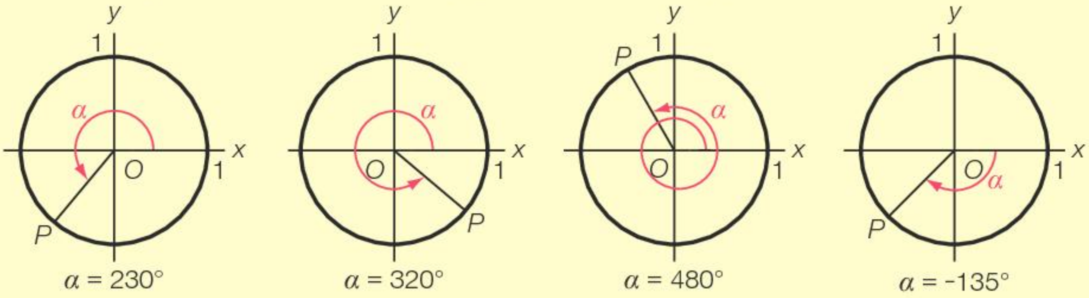
**figuur 8.4**

## Theorie A Definitie van sinus, cosinus en tangens

De cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heet de **eenheidscirkel**.
Het punt $P$ beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt $A(1, 0)$, zie figuur 8.3. Hierdoor ontstaat hoek $AOP$ die we de **draaiingshoek** van $P$ noemen. We geven deze hoek aan met $\alpha$. Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve $x$-as, het tweede been gaat door het punt $P$.
Draait $P$ tegen de wijzers van de klok in, dan is $\alpha$ positief, draait $P$ met de wijzers van de klok mee, dan is $\alpha$ negatief.



De draaiingshoek van $P$ kan ook groter dan 360° zijn.




**figuur 8.5** Draaiingshoeken kunnen zowel positief als negatief zijn.

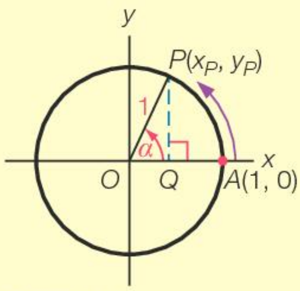
In figuur 8.6 is $0° < \alpha < 90°$. Voor deze scherpe hoek geldt

$\sin(\alpha) = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{y_P}{1} = y_P$, $\cos(\alpha) = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{x_P}{1} = x_P$ en

$\tan(\alpha) = \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{y_P}{x_P}$.

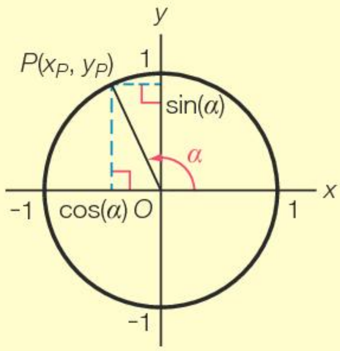
Ook voor niet-scherpe hoeken nemen we per definitie

$\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$.




**figuur 8.6**

**Voor de draaiingshoek $\alpha$ van het punt $P(x_P, y_P)$ op de eenheidscirkel geldt**
**$\sin(\alpha) = y_P$**
**$\cos(\alpha) = x_P$**
**$\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$**




Van draaiingshoeken die een veelvoud zijn van 90°, kun je de sinus en de cosinus eenvoudig uit de eenheidscirkel aflezen. Zo hoort bij $\alpha = 180°$ het punt $P(-1, 0)$, dus $\sin(180°) = 0$ en $\cos(180°) = -1$. Ook kun je de tangens te weten komen van hoeken die een veelvoud zijn van 90°. Zo is $\tan(180°) = \dfrac{0}{-1} = 0$. Omdat $\tan(90°) = \dfrac{1}{0}$ bestaat $\tan(90°)$ niet.

**2** Lees uit de eenheidscirkel af.

| | | |
|---|---|---|
| **a** sin(0°) | **e** sin(270°) | **i** sin(450°) |
| **b** cos(0°) | **f** cos(270°) | **j** cos(−90°) |
| **c** sin(90°) | **g** sin(360°) | **k** tan(−540°) |
| **d** cos(90°) | **h** tan(360°) | **l** cos(−180°) |

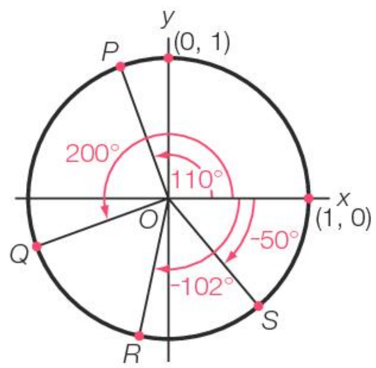
**3** In de eenheidscirkel is gegeven de draaiingshoek $\alpha$ met $0 \leq \alpha \leq 360°$. Bereken alle waarden van $\alpha$ waarvoor geldt

| | | |
|---|---|---|
| **a** $\sin(\alpha) = 0$ | **c** $\sin(\alpha) = 1$ | **e** $\tan(\alpha) = 1$ |
| **b** $\cos(\alpha) = 0$ | **d** $\cos(\alpha) = 1$ | **f** $\tan(\alpha) = -1$ |

**4** Je GR benadert $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ voor iedere waarde van $\alpha$.
Zo is $\sin(260°) \approx -0,98$ en $\cos(260°) \approx -0,17$.

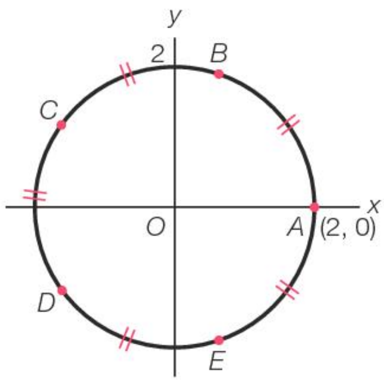
**a** Ga dit na.

**b** Op de eenheidscirkel hiernaast liggen de punten $P$, $Q$, $R$ en $S$.
Bereken de coördinaten van $P$, $Q$, $R$ en $S$. Rond af op twee decimalen.



**figuur 8.7**

**A5** Op de cirkel met middelpunt $O$ en straal 2 van figuur 8.8 liggen de punten $A$, $B$, $C$, $D$ en $E$ waarbij de cirkel wordt verdeeld in vijf cirkelbogen van gelijke lengte. Het punt $A$ is het punt $(2, 0)$.
Bereken de coördinaten van $B$, $C$, $D$ en $E$. Rond af op twee decimalen.



**figuur 8.8**

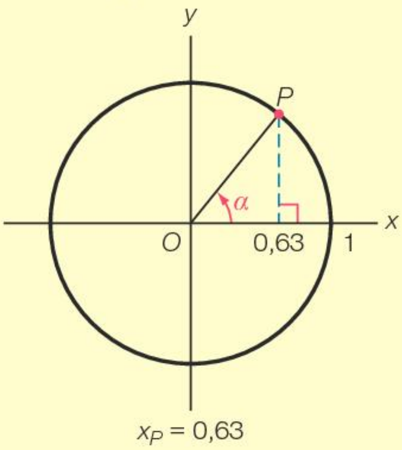
**O6** Op de eenheidscirkel liggen de punten $P$ en $Q$ met $y_P = y_Q = 0,5$, $x_P > 0$ en $x_Q < 0$.

**a** Teken de eenheidscirkel met de punten $P$ en $Q$.

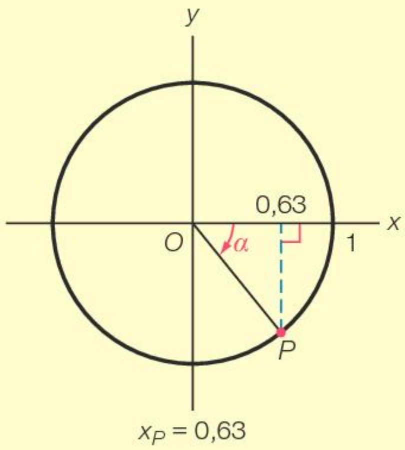
**b** Voor de draaiingshoek $\alpha$ van $P$ geldt $\alpha = 30°$.
Gebruik dit en symmetrie om de draaiingshoek $\beta$ van $Q$, met $0° \leq \beta \leq 360°$, af te lezen uit de figuur van vraag a.

## Theorie B Hoek berekenen bij gegeven $x_P$ of $y_P$

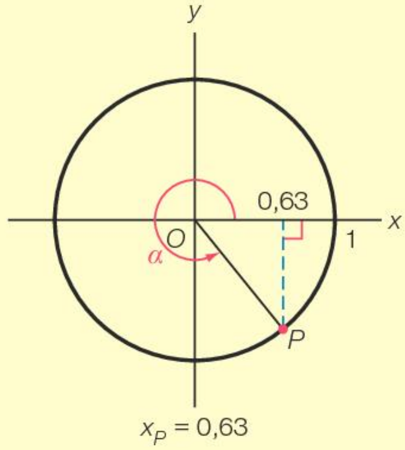
In figuur 8.9 zie je het punt $P$ met $x_P = 0,63$.
Dus $\cos(\alpha) = 0,63$.
Je berekent $\alpha$ op de GR met $\cos^{-1}(0,63)$ of ACOS(0,63).
Je krijgt $\alpha \approx 51°$.



**figuur 8.9**



**figuur 8.10**

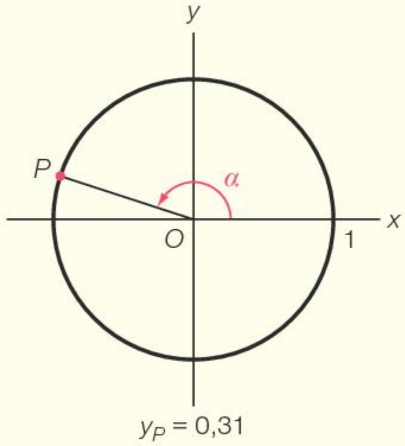


**figuur 8.11**

Ook in figuur 8.10 is $\cos(\alpha) = 0,63$. Maar de bijbehorende hoek $\alpha \approx -51°$ krijg je niet met de GR. Je moet dit zelf bedenken. Je gebruikt daarbij symmetrie.
Bij $x_P = 0,63$ in figuur 8.11 hoort $\alpha \approx 360° - 51° = 309°$.

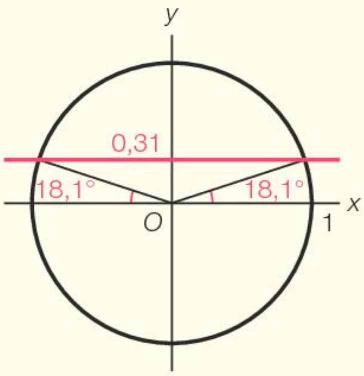
**Voorbeeld**

In figuur 8.12 is $y_P = 0{,}31$.
Bereken $\alpha$ in graden. Rond af op één decimaal.



**figuur 8.12**

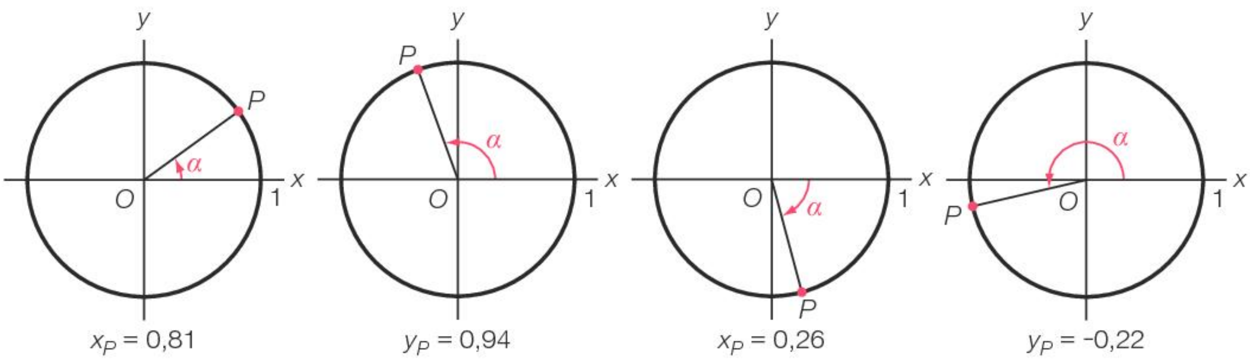
*Uitwerking*
$y_P = 0{,}31$ dus $\sin(\alpha) = 0{,}31$.
De GR geeft 18,05...°.




Dus $\alpha = 180° - 18{,}05...° \approx 161{,}9°$.

**7**

Zie figuur 8.13.
Bereken $\alpha$ in graden. Rond af op één decimaal

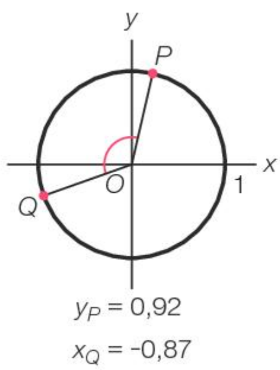



**a** **b** **c** **d**

**figuur 8.13**

**A8**

In figuur 8.14 is $y_P = 0{,}92$ en $x_Q = -0{,}87$.
Bereken $\angle POQ$ in graden. Rond af op één decimaal.



**figuur 8.14**

**A9**

Op de eenheidscirkel liggen het punt $S(0{,}527; 0{,}850)$ en twee punten $T$ waarvoor geldt $\angle SOT = 160°$.
Bereken de coördinaten van $T$. Rond af op twee decimalen.

**010**

**a** Licht toe dat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan $2\pi$.

Het punt $P$ begint in $A(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek $\alpha$ is positief. De lengte van de cirkelboog hangt af van $\alpha$.

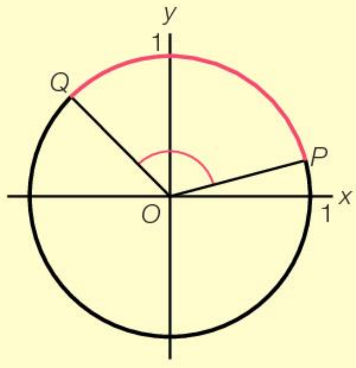
**b** Licht toe dat bij $\alpha = 90°$ de lengte van de door $P$ doorlopen cirkelboog gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.

**c** Vul de tabel verder in.

| draaiingshoek $\alpha$ | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|
| lengte cirkelboog | | $\frac{1}{2}\pi$ | | | $2\pi$ |

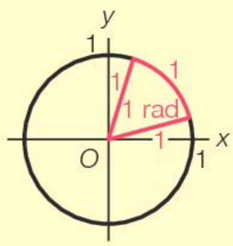
## Theorie C De hoekeenheid radiaal

Voor de punten $P$ en $Q$ op een cirkel met middelpunt $M$ heet hoek $PMQ$ een **middelpuntshoek**.
We definiëren met behulp van de eenheidscirkel de hoekmaat **radiaal**.
Voor de punten $P$ en $Q$ op de eenheidscirkel is de middelpuntshoek $POQ$ in radialen gelijk aan de lengte van de bijbehorende cirkelboog $PQ$.
Dus hoek = booglengte.
De hoekmaat radiaal wordt afgekort tot **rad**.
De radiaal is dus zo gedefinieerd, dat bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort.
Bij een booglengte van 2 hoort een middelpuntshoek van 2 rad. En bij een booglengte van $\pi$ hoort een middelpuntshoek van $\pi$ rad.




**figuur 8.15**

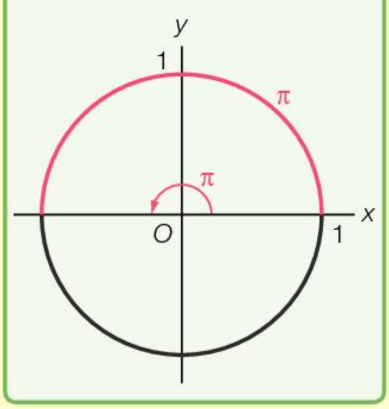
**De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.**




De hele eenheidscirkel heeft booglengte $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
Bij deze booglengte hoort dus een middelpuntshoek van $2\pi$ rad.
Hieruit volgt direct $2\pi$ rad = 360°, dus $\pi$ rad = 180°.

$\pi$ rad = 180°

$\pi$ rad = 180°



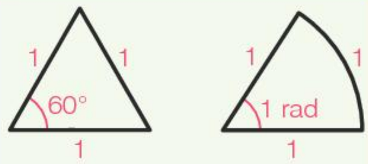
### Voorbeeld

**a** Druk $\frac{2}{3}\pi$ rad uit in graden.

**b** Druk $\frac{1}{4}$ rad uit in graden. Rond af op één decimaal.

**c** Druk 75° uit in radialen. Geef een exact antwoord.

**d** Druk 107° uit in radialen. Rond af op twee decimalen.



1 rad is bijna 60°.

*Uitwerking*

**a** $\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$

**b** $\frac{1}{4} \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 14{,}3°$

**c** $75° = 75 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5}{12}\pi \text{ rad}$

**d** $107° = 107 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 1{,}87 \text{ rad}$

Bij het berekenen van bijvoorbeeld $\sin(\frac{3}{4} \text{ rad})$ is het nodig op de GR de hoekeenheid in te stellen op radialen.
Op de TI gaat dat in het mode-menu, op de Casio in het SET-UP-menu en op de HP in het Settings-menu.

**11** Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

**a** $\frac{1}{6}\pi$ rad

**b** $\frac{1}{4}\pi$ rad

**c** $2\pi$ rad

**d** 2 rad

**e** $1\frac{1}{4}\pi$ rad

**f** $1\frac{1}{4}$ rad

**g** $-2\frac{1}{3}\pi$ rad

**h** $-2\frac{1}{3}$ rad

Let goed op het verschil tussen $\frac{1}{3}$ rad en $\frac{1}{3}\pi$ rad.
$\frac{1}{3} \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 19{,}1°$ en
$\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot 180° = 60°$.

INFORMATIEF

## De hoekeenheid radiaal

Sinds het oude Babylonische rijk (ca. 2000 v.Chr) worden hoeken uitgedrukt in graden. Maar in plaats van een volle hoek in 360 graden te verdelen, had er ook voor een andere hoekeenheid gekozen kunnen worden. Pas in de 18e eeuw werd duidelijk dat er voor het differentiëren van goniometrische functies een andere hoekeenheid nodig is. Deze hoekeenheid wordt met behulp van de straal van een cirkel en een cirkelboog als volgt gedefinieerd. De hoek in radialen is gelijk aan de lengte van de boog gedeeld door de lengte van de straal. Een andere benaming voor straal is radius, waaruit de naam radiaal is afgeleid.

**12** Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

**a** 360° **c** 45° **e** 90° **g** 300°
**b** 30° **d** 60° **f** 135° **h** 210°

**13** Druk uit in radialen. Rond af op twee decimalen.

**a** 10° **b** 57,3° **c** 1030° **d** 90°

**Afspraak**
In het vervolg laten we bij een hoek in radialen de eenheid rad meestal weg.
Dus $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ betekent $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad.

**14** Vul de volgende tabel in. Geef exacte waarden.

| hoek in graden | 40° | | 100° | | 145° | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| hoek in radialen | | $\frac{2}{5}\pi$ | | $\frac{3}{4}\pi$ | | $\frac{5}{6}\pi$ |

**15** Bereken. Rond af op twee decimalen.

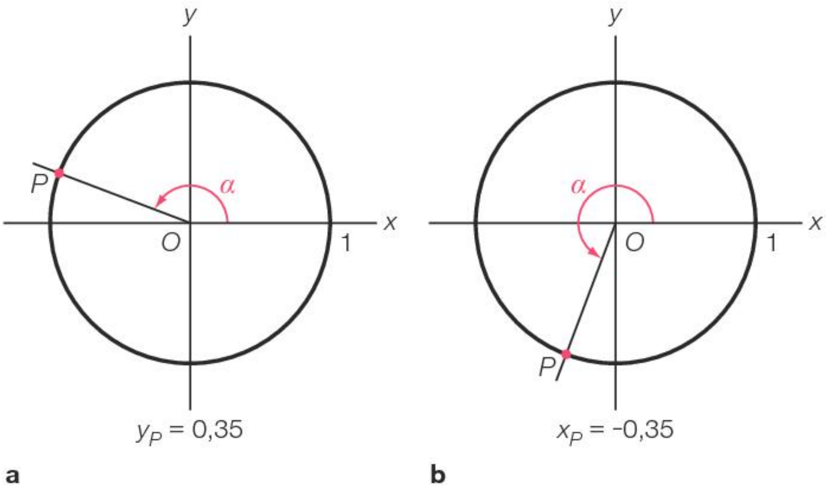
**a** $\cos(\frac{5}{8}\pi)$ **c** $\sin(\frac{4}{5}\pi)$ **e** $\cos(7{,}6\pi)$
**b** $\cos(\frac{5}{8})$ **d** $\sin(\frac{4}{5})$ **f** $\cos(7{,}6)$

**16** Bereken $\alpha$ met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ in radialen. Rond af op twee decimalen.

**a** $\sin(\alpha) = 0{,}92$ **c** $\sin(\alpha) = \frac{5}{12}$ **e** $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$
**b** $\cos(\alpha) = 0{,}85$ **d** $\cos(\alpha) = \frac{3}{17}$ **f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

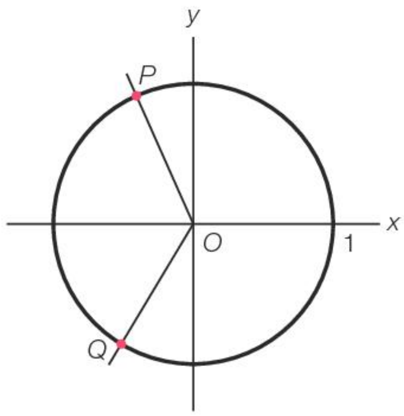
**17**
**a** Bereken $\sin(\frac{1}{5}\pi) + \cos(\frac{2}{5}\pi) - \sin(\frac{3}{5})$. Rond af op twee decimalen.
**b** Voor welke $\alpha$ met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ is $\cos(2\alpha) = 0{,}6$? Rond af op twee decimalen.

**18** Zie figuur 8.16.
Bereken $\alpha$ in radialen. Rond af op twee decimalen.




**figuur 8.16**

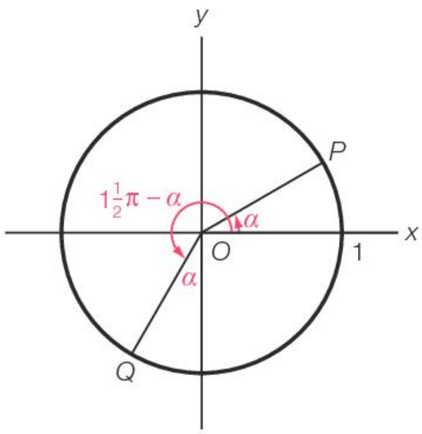
**A19** In figuur 8.17 is $x_P = -0{,}32$ en $y_Q = -0{,}88$.
Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.



**figuur 8.17**

**A20** Om $\cos(1\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$ of $\cos(\alpha)$ gebruik je de figuur hiernaast. Je ziet dat $x_Q = -y_P$, dus $\cos(1\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
Druk uit in $\sin(\alpha)$ of $\cos(\alpha)$.

**a** $\sin(\pi - \alpha)$
**b** $\cos(\pi - \alpha)$
**c** $\sin(2\pi - \alpha)$
**d** $\cos(2\pi - \alpha)$
**e** $\sin(1\frac{1}{2}\pi - \alpha)$
**f** $\cos(1\frac{1}{2}\pi + \alpha)$
**g** $\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha)$
**h** $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha)$



**figuur 8.18**

**O21** Bereken de exacte waarde.
**a** $\cos(\frac{1}{6}\pi)$
**b** $\sin(\frac{1}{4}\pi)$

## Theorie D De exacte-waarden-cirkel

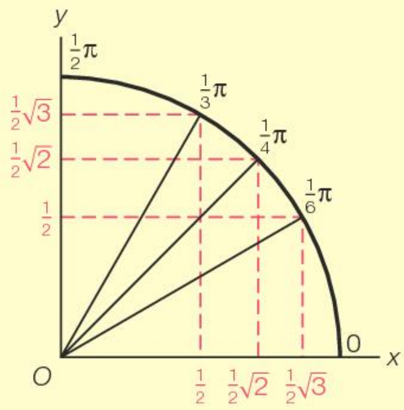
Je kent de tabel hiernaast uit de voorkennis. Deze tabel breiden we uit met hoeken van 0° en 90°. Verder gebruiken we radialen in plaats van graden.

| **hoek** | **30°** | **45°** | **60°** |
|---|---|---|---|
| **sinus** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| **cosinus** | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **tangens** | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Zo krijg je de tabel hieronder. Leer deze tabel uit het hoofd.

| **hoek** | **0** | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **sinus** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| **cosinus** | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| **tangens** | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |

In de kwart eenheidscirkel hiernaast zijn de sinus en cosinus van de hoeken uit de tabel verwerkt.
Door te spiegelen in de $y$-as en de $x$-as krijg je de eenheidscirkel met exacte waarden, kortweg de **exacte-waarden-cirkel**.



**figuur 8.19**

Uit de exacte-waarden-cirkel lees je af

$\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en

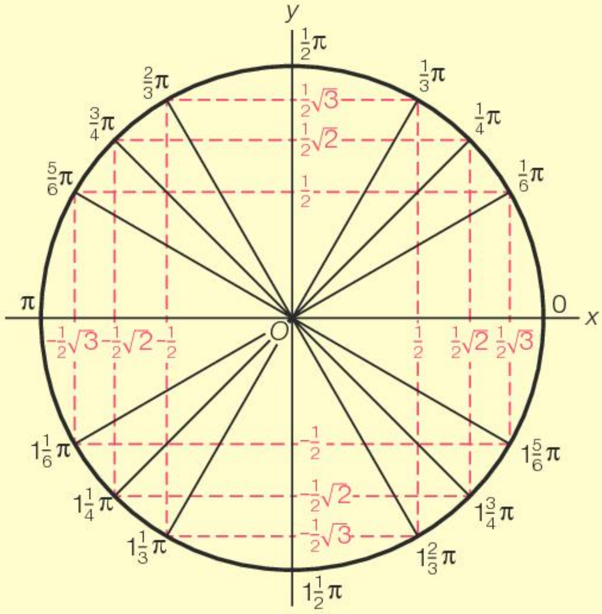
$\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Uit de definities $\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$ volgt $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Zo is bijvoorbeeld

$$\tan(\tfrac{1}{6}\pi) = \frac{\sin(\frac{1}{6}\pi)}{\cos(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{en } \tan(1\tfrac{1}{6}\pi) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$




**figuur 8.20** De exacte-waarden-cirkel.

**22** Geef de exacte waarde.

**a** $\sin(\frac{3}{4}\pi)$
**b** $\cos(1\frac{1}{6}\pi)$
**c** $\sin(1\frac{1}{3}\pi)$
**d** $\cos(1\frac{1}{3}\pi)$
**e** $\cos(1\frac{2}{3}\pi)$
**f** $\sin(-\frac{1}{4}\pi)$


**23** Bereken de exacte waarde van $\tan(1\frac{5}{6}\pi) - \tan(\frac{2}{3}\pi)$.

**24** Geef de exacte waarden van $\alpha$ met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

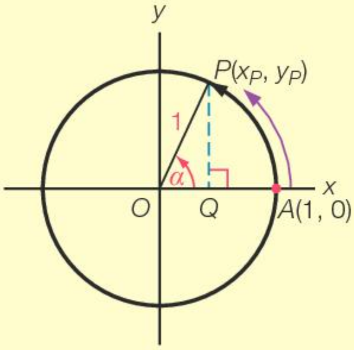
**a** $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
**b** $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$
**c** $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
**d** $\cos(\alpha) = 0$
**e** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
**f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

**A25** Geef de exacte waarde van $x$.

**a** $x = \sin(\frac{5}{6}\pi)$
**b** $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ met $0 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\pi$
**c** $x = \cos(1\frac{3}{4}\pi)$
**d** $\cos(x) = \frac{1}{2}$ met $1\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$

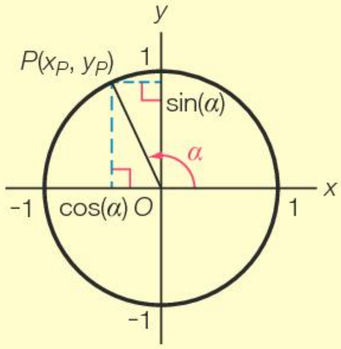
# Terugblik

## Eenheidscirkel en draaiingshoek




De eenheidscirkel is de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1.
In de figuur hiernaast is $\alpha$ de draaiingshoek van het punt $P$.
Het eerste been van de draaiingshoek van $P$ is de positieve $x$-as, het tweede been snijdt de eenheidscirkel in het punt $P$.
Hiernaast is $\alpha$ positief, want het punt $P$ draait tegen de wijzers van de klok in.

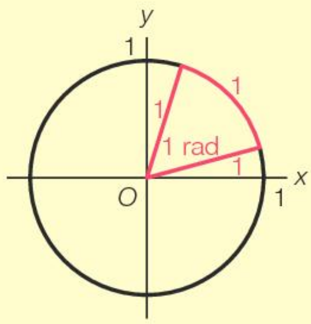
## Sinus, cosinus en tangens




Met behulp van de eenheidscirkel definiëren we ook voor niet-scherpe hoeken $\alpha$ wat $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ is. Zie hiernaast.

$\sin(\alpha) = y_P$, $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$.

## Radialen

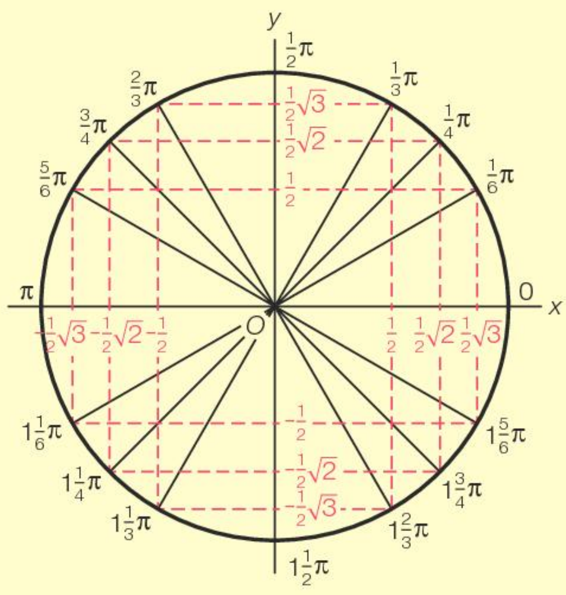



De radiaal is een hoekmaat.
De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.
Maak bij het omzetten van graden in radialen en omgekeerd gebruik van $\pi$ rad = 180°.

$1\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{3} \cdot 180° = 240°$ en $-150° = -150 \cdot \dfrac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$ rad

De hoekeenheid radiaal mag weggelaten worden, maar de hoekeenheid graad niet.
Dus $\sin(2{,}5) \approx 0{,}60$ en $\sin(2{,}5°) \approx 0{,}04$.

## Exacte-waarden-cirkel




Bij hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ of van $\frac{1}{4}\pi$ moet je de exacte waarde weten van de sinus, de cosinus en de tangens. Je gebruikt hierbij de exacte-waarden-cirkel.
Je leest bijvoorbeeld af

$\cos(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\sin(-\frac{2}{3}\pi) = \sin(1\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en

$\tan(1\frac{2}{3}\pi) = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.

# 8.2 Sinusoïden

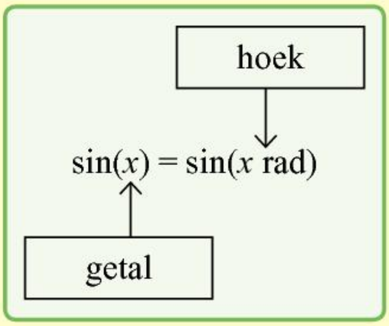
**O26** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

**a** Plot de grafiek van $f$. Neem $y$ tussen $-2$ en 2 en zorg voor de instelling op radialen.

**b** Geef de exacte coördinaten van de toppen van de grafiek.

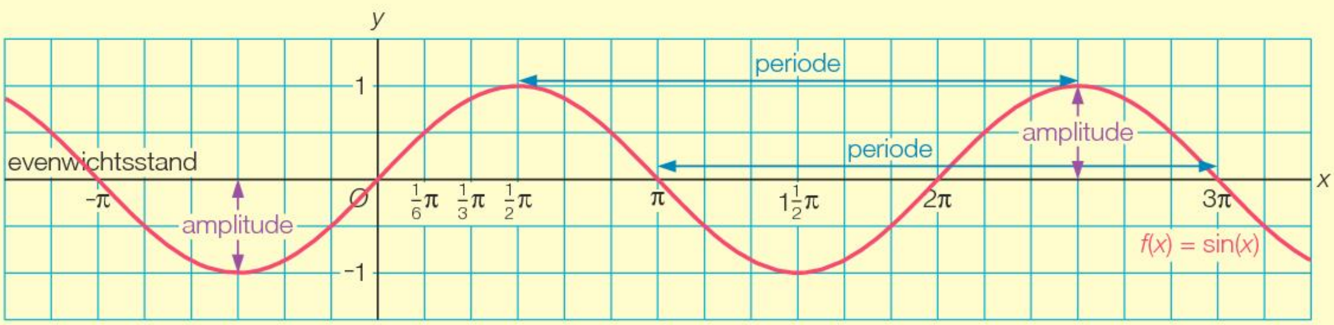
**c** Geef de exacte coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de $x$-as.

## Theorie A De functie $f(x) = \sin(x)$




Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen.
We definiëren de functie $f(x) = \sin(x)$ als de functie die bij elk getal $x$ de sinus van $x$ radialen geeft.
Hieronder is de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend. Op de horizontale as is 3 cm rechts van de oorsprong het getal $\pi$ gezet. Bij het tekenen van de grafiek is de volgende tabel gebruikt.

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $1\frac{1}{6}\pi$ | $1\frac{1}{2}\pi$ | $1\frac{5}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |




**figuur 8.21** Op de $x$-as is 1 cm rechts van de oorsprong $\frac{1}{3}\pi$ gezet. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1{,}047 \approx 1$.

De grafiek is periodiek met **periode** $2\pi$. De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1. De nulpunten zijn ..., $-2\pi$, $-\pi$, 0, $\pi$, $2\pi$, $3\pi$, ...

**27** Gegeven is de functie $g(x) = \cos(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

$\cos(x) = \cos(x \text{ rad})$

**a** Plot de grafiek. Neem $y$ tussen $-2$ en 2.

**b** Geef de exacte coördinaten van de vijf toppen van de grafiek.

**c** Geef exact de nulpunten van $g$.

**d** Teken de grafiek. Gebruik de schaalverdeling van figuur 8.21.

**028**

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

**a** Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 + \sin(x)$ uit de grafiek van $f$?
Geef de evenwichtsstand van de grafiek van $g$.

**b** Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ uit de grafiek van $f$?
Bereken exact de nulpunten van $h$.

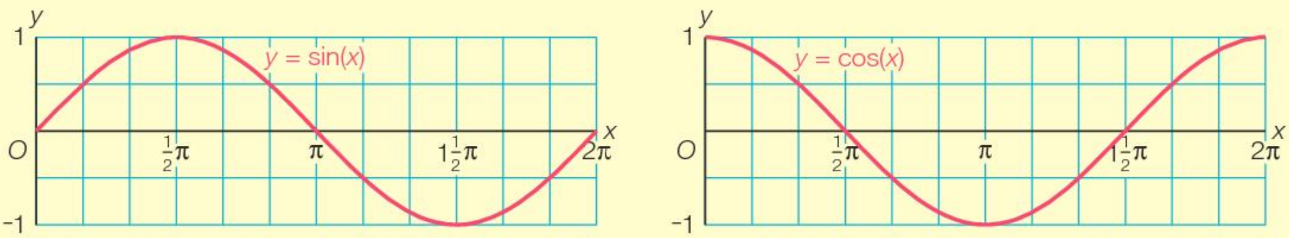
**c** Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 4\sin(x)$ uit de grafiek van $f$?
Geef de amplitude van de grafiek van $k$.

**d** Hoe ontstaat de grafiek van $l(x) = \sin(5x)$ uit de grafiek van $f$?
Wat is de periode van de grafiek van $l$?

## Theorie B Transformaties bij goniometrische functies

De functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn standaardfuncties. De bijbehorende grafieken mag je dus zonder toelichting tekenen. Beide grafieken hebben evenwichtsstand 0, amplitude 1 en periode $2\pi$.

Een punt waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, noemen we een **beginpunt** van de grafiek van $f$.
Een hoogste punt van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ noemen we een beginpunt van de grafiek van $g$.




**figuur 8.22** Van de standaardgrafieken $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ is één periode getekend.

Uitgaande van deze standaardgrafieken krijg je door translaties of vermenigvuldigingen andere periodieke grafieken. Zulke grafieken heten **sinusoïden**.

**Effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \sin(x)$**

| *transformatie* | *beeldgrafiek* | *kenmerk* |
|---|---|---|
| translatie $(0, a)$ | $y = a + \sin(x)$ | evenwichtsstand $a$ |
| verm. $x$-as, $b$ | $y = b\sin(x)$ | amplitude $b$ $(b > 0)$ |
| verm. $y$-as, $\frac{1}{c}$ | $y = \sin(cx)$ | periode $\frac{2\pi}{c}$ $(c > 0)$ |
| translatie $(d, 0)$ | $y = \sin(x - d)$ | beginpunt $(d, 0)$ |

Pas je meer transformaties na elkaar toe, let dan goed op de volgorde.
Vergelijk

| | |
|---|---|
| $y = \sin(x)$<br>$\downarrow$ verm. $x$-as, 3<br>$y = 3\sin(x)$<br>$\downarrow$ translatie $(0, 2)$<br>$y = 2 + 3\sin(x)$ | $y = \sin(x)$<br>$\downarrow$ translatie $(0, 2)$<br>$y = 2 + \sin(x)$<br>$\downarrow$ verm. $x$-as, 3<br>$y = 3(2 + \sin(x))$<br>oftewel $y = 6 + 3\sin(x)$ |

En vergelijk ook

| | |
|---|---|
| $y = \sin(x)$<br>$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$<br>$y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$<br>$\downarrow$ verm. $y$-as, 2<br>$y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$ | $y = \sin(x)$<br>$\downarrow$ verm. $y$-as, 2<br>$y = \sin(\frac{1}{2}x)$<br>$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$<br>$y = \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$<br>oftewel $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$ |

**Voorbeeld**
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$.
Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

*Aanpak*
Bedenk hoe de grafiek van $f$ uit een standaardgrafiek ontstaat.

$$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{2}} y = \sin(2x)$$

Dus de periode wordt $\pi$.

$$y = \sin(2x) \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2})} y = \frac{1}{2} + \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

Dus de evenwichtsstand wordt $\frac{1}{2}$ en een beginpunt wordt $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.
De amplitude is niet veranderd, dus de amplitude blijft 1.

*Uitwerking*
De evenwichtsstand is $\frac{1}{2}$, de amplitude is 1, de periode is $\pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.

**R29** Zie het voorbeeld met de functie $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$.
Volgens José hoort bij de grafiek van $g(x) = \frac{1}{2} + \cos(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ dezelfde evenwichtsstand, dezelfde amplitude en dezelfde periode als bij de grafiek van $f$.

**a** Ben je het met José eens?
**b** Geef de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van $g$.

**R30** Zie het schema in de theorie met het effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \sin(x)$.
Maak net zo'n schema voor $y = \cos(x)$.

**31** Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

**a** $f(x) = 2\sin(x + 3)$

**b** $g(x) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{5}$

**c** $h(x) = \cos(3(x - 4))$

**d** $j(x) = 1\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{4}x)$

**32** Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

**a** $f(x) = 5 + 1{,}2\cos(x - \frac{1}{6}\pi)$

**b** $g(x) = 0{,}4 + \sin(\frac{1}{5}(x + \frac{1}{3}\pi))$

**c** $h(x) = 0{,}29\cos(3(x + 1{,}4))$

**d** $j(x) = -0{,}8 + 2\sin(3(x - \frac{1}{2}\pi))$

**33**
**a** De grafiek van $f$ ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met 3 toe te passen.
Stel het functievoorschrift van $f$ op.

**b** De grafiek van $g$ ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met 3 en dan de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van $g$ op.

**A34** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.

**a** Geef van de grafiek van $f$ de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

**b** Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van $f$ de lijn van de evenwichtsstand snijdt.

**c** Geef de exacte coördinaten van de drie toppen van de grafiek.

**d** De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as achtereenvolgens in de punten $A$, $B$ en $C$.
Geef de exacte afstand tussen $A$ en $C$.

**A35** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$ en $g(x) = -2 + 4\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$. Je kunt een translatie $(m, n)$ op de grafiek van $f$ toepassen zo, dat het beeld van de grafiek van $f$ samenvalt met de grafiek van $g$.
Bereken mogelijke waarden van $m$ en $n$.

**O36** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3\sin(x)$ en $g(x) = 2 - 3\sin(x)$.

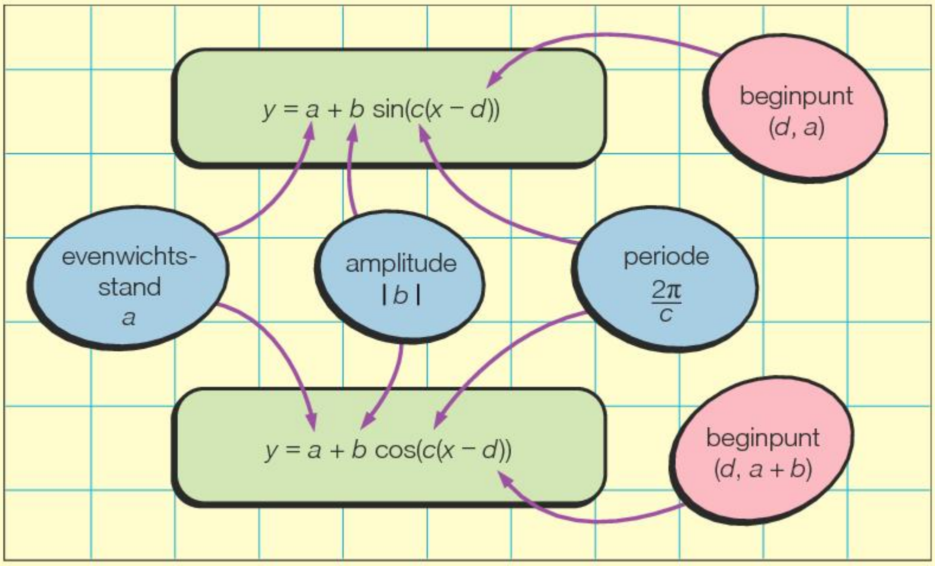
**a** Plot de grafieken. Neem $x$ tussen 0 en $2\pi$.

**b** De amplitude is een positief getal.
Geef van beide grafieken de amplitude.

## Theorie C Sinusoïden tekenen

De amplitude is een positief getal, dus de grafiek van $y = -3\sin(x)$ heeft amplitude 3.
De amplitude van de grafiek van $f(x) = b\sin(x)$ is voor $b > 0$ gelijk aan $b$ en voor $b < 0$ gelijk aan $-b$.
Dus de amplitude van de grafiek is gelijk aan $|b|$.

De sinusoïden $y = a + b\sin(c(x-d))$ en $y = a + b\cos(c(x-d))$ kun je tekenen door gebruik te maken van de vier kenmerken evenwichtsstand, amplitude, periode en beginpunt.
In dit hoofdstuk kiezen we steeds $c > 0$.




Let op het verschil tussen $b > 0$ en $b < 0$.

| | $y = a + b\sin(c(x-d))$ | $y = a + b\cos(c(x-d))$ |
|---|---|---|
| $b > 0$ | stijgend door $(d, a)$ | $(d, a + b)$ is een hoogste punt |
| $b < 0$ | dalend door $(d, a)$ | $(d, a + b)$ is een laagste punt |

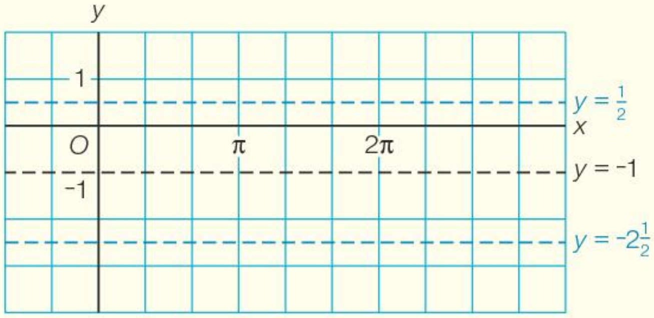
Voor het tekenen van een sinusoïde herleid je de formule eerst tot de vorm $y = a + b\sin(c(x-d))$ of $y = a + b\cos(c(x-d))$. Vervolgens vermeld je de vier kenmerken. Daarna kun je de grafiek tekenen.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van $f$.

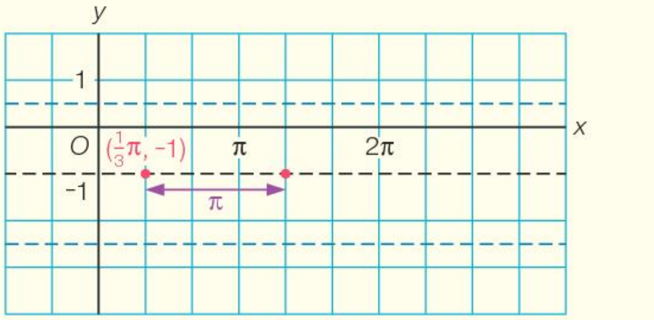
*Aanpak*

1 Schrijf de formule in de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ en vermeld de vier kenmerken.

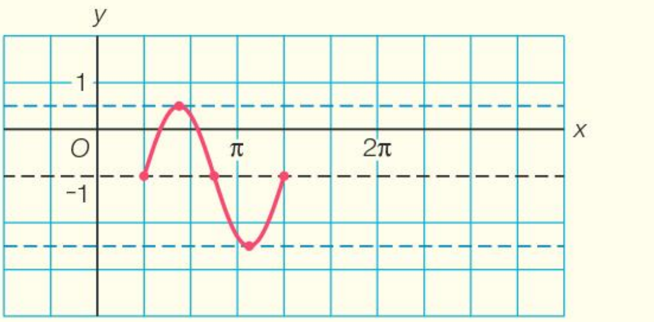



2 Stippel in een assenstelsel de lijn van de evenwichtsstand en de horizontale lijnen waarop de toppen liggen.

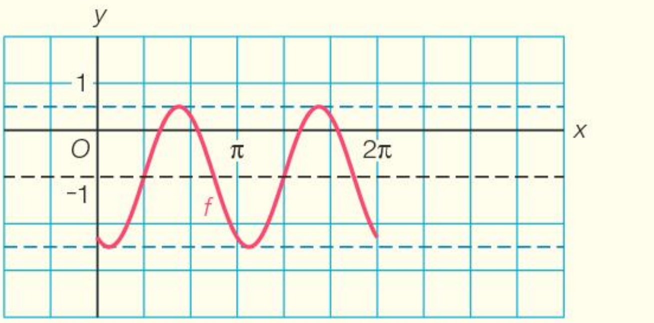
3 Teken een beginpunt en het punt dat één periode verder ligt.




4 Teken één periode van de grafiek. Gebruik dat de grafiek $\frac{1}{4}$ periode na een beginpunt een hoogste punt heeft, $\frac{1}{2}$ periode na een beginpunt weer door de lijn van de evenwichtsstand gaat en $\frac{3}{4}$ periode na een beginpunt een laagste punt heeft.




5 Teken de grafiek op het gegeven domein. Gebruik de periodiciteit.




*Uitwerking*

$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$

$\quad = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$

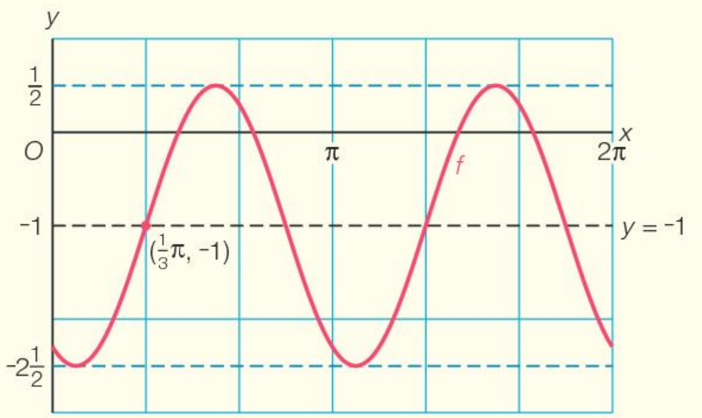
evenwichtsstand $-1$

amplitude $1\frac{1}{2}$

periode $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$1\frac{1}{2} > 0$, dus grafiek stijgend door het punt $(\frac{1}{3}\pi, -1)$.

Zie de grafiek hiernaast.



**37**
**a** Teken de grafiek van $f(x) = -2 + 3\sin(3x + \pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
**b** Teken de grafiek van $g(x) = 1 - 2\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

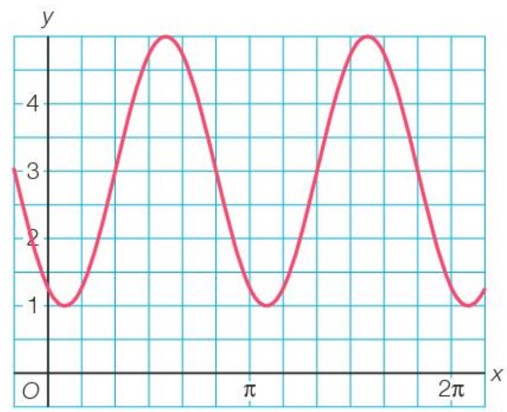
Controleer de grafiek met de GR.

**38**
**a** Teken de grafiek van $f(x) = 1 + 3\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, \pi]$.
**b** Teken de grafiek van $g(x) = 3 - 4\cos(\pi x)$ met domein $[0, 6]$.

**A39**
**a** Teken de grafiek van $f(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.
**b** Teken de grafiek van $g(x) = 5 - 3\sin(\frac{1}{4}\pi x)$ met domein $[0, 10]$.

**E40**
[▸ WERKBLAD] Op het werkblad is de sinusoïde $y = 2 - 3\sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$ op een rooster, maar zonder assenstelsel getekend. Teken het assenstelsel op de juiste plaats.

**O41**
Gegeven is de sinusoïde in figuur 8.23.
**a** Lees de evenwichtsstand, amplitude en periode af.
**b** De formule is van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$.
Geef mogelijke waarden van $a$, $b$, $c$ en $d$.



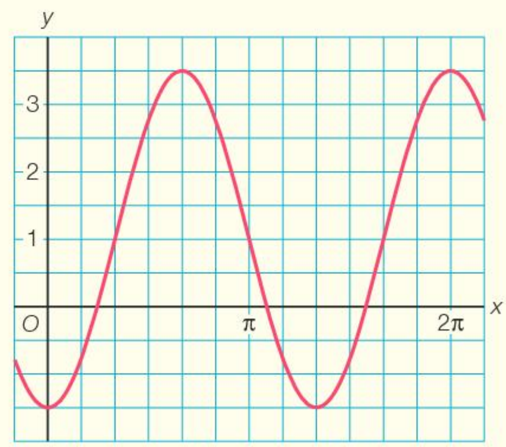
**figuur 8.23**

## Theorie D Een formule van een sinusoïde opstellen

In het voorbeeld zie je hoe je bij een sinusoïde een formule opstelt.

### Voorbeeld

In figuur 8.24 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$.



**figuur 8.24**

*Uitwerking*

$$a = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = 1$$

$$b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

De periode is $1\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$, dus $c = \dfrac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$,
dus $d = \frac{1}{3}\pi$.
Dus $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin(1\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$.

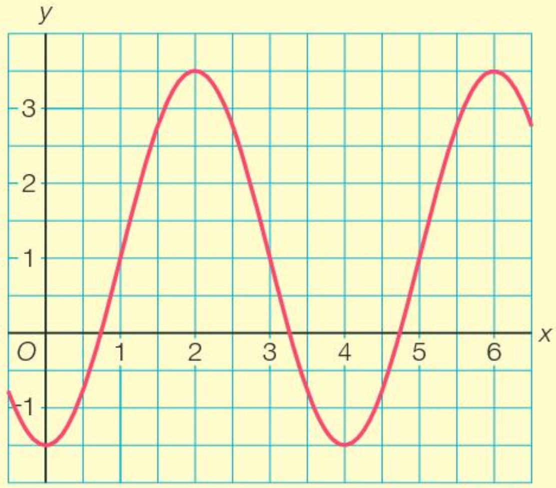
Bij de sinusoïde van het voorbeeld is ook een formule van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ op te stellen. Je neemt dan een hoogste punt als beginpunt. Een hoogste punt is $(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $d = \frac{2}{3}\pi$ en de formule is $y = 1 + 2\frac{1}{2}\cos(1\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}\pi))$.

In figuur 8.25 zie je een sinusoïde zoals in het voorbeeld, maar nu staan bij de horizontale as de getallen 1, 2, 3, ...

De periode is $5 - 1 = 4$, dus $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$ .

Je krijgt $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}\pi(x - 1))$ en ook

$y = 1 + 2\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}\pi(x - 2))$.

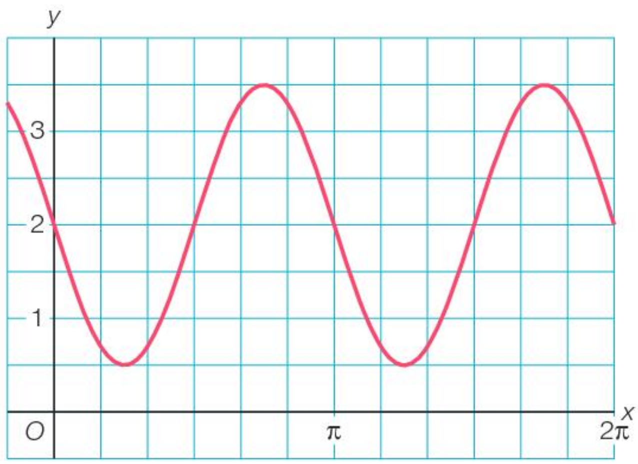



**figuur 8.25**

**42** Zie het voorbeeld.
Stel bij figuur 8.24 een formule op van de vorm
- **a** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$
- **b** $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$.

**43** Zie de theorie hiervoor met figuur 8.25.
Stel bij deze figuur een formule op van de vorm
- **a** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$
- **b** $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$.

**44** Bij de sinusoïde in figuur 8.26 zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
- **a** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$
- **b** $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$.

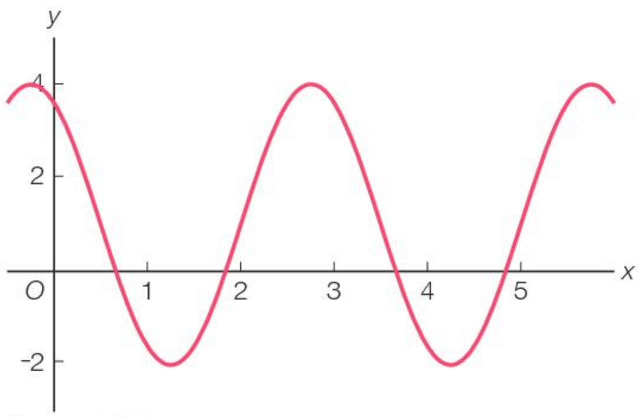



**figuur 8.26**

**45**

Bij de sinusoïde in figuur 8.27 zijn twee opeenvolgende toppen $(1\frac{1}{4}, -2)$ en $(2\frac{3}{4}, 4)$.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

**a** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$
**b** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$.

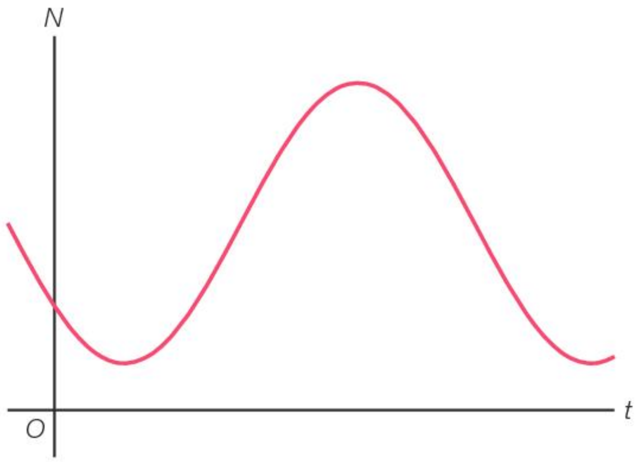


**figuur 8.27**

**A46**

Bij de sinusoïde in figuur 8.28 geldt voor de toppen dat $N = 25$ en $N = 175$.
De grafiek gaat door de evenwichtsstand bij $t = 4$ en bij $t = 9$.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

**a** $N = a + b\sin(c(t - d))$ met $b > 0$
**b** $N = a + b\cos(c(t - d))$ met $b > 0$.



**figuur 8.28**

**A47**

**a** Van een sinusoïde zijn de punten (3, 12) en (18, 12) twee opeenvolgende hoogste punten, die op afstand 4 van de evenwichtsstand liggen.
Stel een formule op van deze sinusoïde.

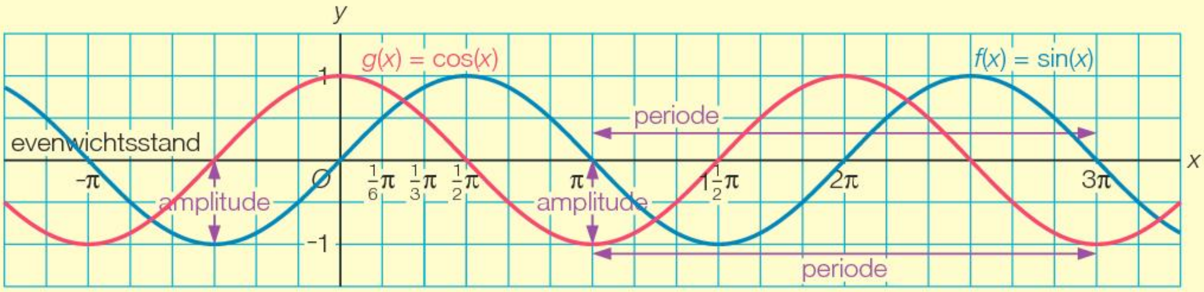
**b** Van een sinusoïde is de evenwichtsstand 650 en de periode 48.
Het punt (16, 812) is een top.
Stel een formule op van deze sinusoïde.

**c** Van een sinusoïde zijn de punten (2, 250) en (26, 110) twee opeenvolgende toppen.
Stel een formule op van deze sinusoïde.

# Terugblik

## De grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$

De grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn periodiek met periode $2\pi$.
Van beide is de evenwichtsstand 0 en de amplitude 1.
Een beginpunt van de grafiek van $f$ is $(0, 0)$ en van de grafiek van $g$ is dat $(0, 1)$.




## Sinusoïden tekenen

De grafieken van $y = a + b\sin(c(x - d))$ en $y = a + b\cos(c(x - d))$ heten sinusoïden.
De vier kenmerken van sinusoïden zijn

- evenwichtsstand is $a$
- amplitude is $|b|$
- periode is $\frac{2\pi}{c}$, dus $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ $(c > 0)$
- beginpunt bij een sinusgrafiek is $(d, a)$
- beginpunt bij een cosinusgrafiek is $(d, a + b)$.

| | $b > 0$ | $b < 0$ |
|---|---|---|
| sin | stijgend door $(d, a)$ | dalend door $(d, a)$ |
| cos | $(d, a + b)$ is een hoogste punt | $(d, a + b)$ is een laagste punt |

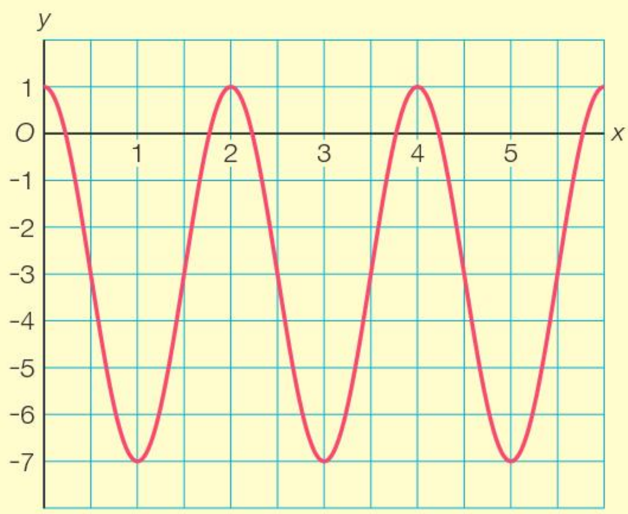
Deze vier kenmerken gebruik je bij het tekenen van sinusoïden.

## Formule opstellen bij sinusoïde

Bij een gegeven sinusoïde zijn oneindig veel formules op te stellen.
Je kunt een formule met een sinus of met een cosinus kiezen en je hebt de keuze uit $b > 0$ of $b < 0$.
Bij de figuur hiernaast lees je af

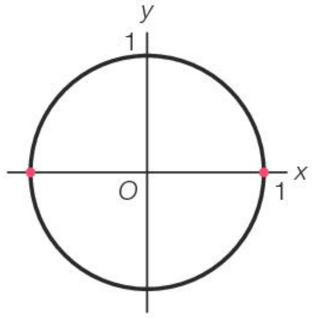
- de evenwichtsstand is $\frac{1 + -7}{2} = -3$
- de amplitude is $1 - -3 = 4$
- de periode is 2.

Mogelijke formules zijn
$y = -3 + 4\sin(\pi(x - 1\tfrac{1}{2}))$
$y = -3 - 4\sin(\pi(x - \tfrac{1}{2}))$
$y = -3 + 4\cos(\pi x)$
$y = -3 - 4\cos(\pi(x - 1))$



# 8.3 Goniometrische vergelijkingen

**O48** De eenheidscirkel snijdt de $x$-as in de punten (1, 0) en (−1, 0).
Bij deze punten horen de draaiingshoeken 0, π, 2π, 3π, ... en ook −π, −2π, −3π, ...
Welke draaiingshoeken horen bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de $y$-as?




**figuur 8.29**

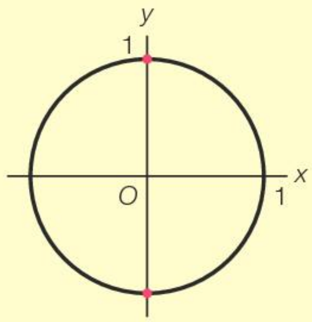
## Theorie A sin(*A*) = *C* en cos(*A*) = *C* met *C* = −1, 0, 1

In opgave 48 heb je gezien dat bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de $x$-as de draaiingshoeken ..., −3π, −2π, −π, 0, π, 2π, 3π, ... horen.
Dit noteren we kort als $k \cdot \pi$, waarin $k$ een geheel getal is.
De getallen $k \cdot \pi$ zijn oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$.

> $k$ is in dit hoofdstuk een geheel getal.

Hiermee heb je alle oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$, want de sinus van een hoek is de $y$-coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten (−1, 0) en (1, 0) zijn alle punten op de eenheidscirkel met $y$-coördinaat 0.
En zo heeft de vergelijking $\cos(x) = 0$ als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ .
Bij de vergelijking $\sin(x) = 1$ hoort het punt op de eenheidscirkel met $y$-coördinaat 1, dus het punt (0, 1). Dus de vergelijking $\sin(x) = 1$ heeft als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ .

> Bij het punt (0, 1) horen de draaiingshoeken $\frac{1}{2}\pi$, $2\frac{1}{2}\pi$, $4\frac{1}{2}\pi$, ... en ook $-1\frac{1}{2}\pi$, $-3\frac{1}{2}\pi$, $-5\frac{1}{2}\pi$, ...




**figuur 8.30** Bij $\cos(x) = 0$ horen punten op de eenheidscirkel met $x$-coördinaat 0.

**De vergelijkingen sin(*A*) = *C* en cos(*A*) = *C* met *C* = −1, 0, 1 los je op met behulp van de eenheidscirkel.**

| | |
|---|---|
| **$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$** | **$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$** |
| **$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$** | **$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$** |
| **$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$** | **$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$** |

Voor $A$ kun je elke uitdrukking invullen.
Bij de vergelijking $\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 0$ is $A = 4x - \frac{1}{3}\pi$.
Je krijgt $4x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$, dus $4x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$, oftewel $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$.

### Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

**a** $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

**b** $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

**c** $\sin^2(2x) = 1$

$\cos^2(x)$ betekent $(\cos(x))^2$

*Uitwerking*

**a** $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ — Deel alle termen door 2, dus $k \cdot 2\pi$ wordt $k \cdot \pi$.

$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

**b** $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$ — Breng $\cos(x)$ buiten haakjes.

$\cos(x)(\cos(x) - 1) = 0$ — Gebruik $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

$\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = 1$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = k \cdot 2\pi$

**c** $\sin^2(2x) = 1$ — Gebruik $A^2 = 1$ geeft $A = 1 \vee A = -1$.

$\sin(2x) = 1 \vee \sin(2x) = -1$

$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

In voorbeeld c krijg je als oplossing de twee rijtjes $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$.

Uitschrijven van het rijtje oplossingen $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ geeft
$\ldots, -1\frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 2\frac{1}{4}\pi, \ldots$

Uitschrijven van het rijtje oplossingen $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$ geeft
$\ldots, -1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi, 2\frac{3}{4}\pi, \ldots$

Neem je deze rijtjes samen, dan krijg je
$\ldots, -1\frac{3}{4}\pi, -1\frac{1}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi, 2\frac{1}{4}\pi, 2\frac{3}{4}\pi, \ldots$ en dit is te schrijven als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

Soms kun je in opgaven rijtjes oplossingen samennemen, maar dat is niet verplicht.

**49** Bereken exact de oplossingen.

**a** $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0$

**b** $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi) = 0$

**c** $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$

**d** $\cos^2(2x) + \cos(2x) = 0$

**50** Bereken exact de oplossingen.

**a** $\cos^2(x - \frac{1}{5}\pi) = 1$

**b** $\sin^2(2x - \frac{1}{4}\pi) = 1$

**c** $\sin^3(x) - \sin(x) = 0$

**d** $\cos^3(2x) - \cos(2x) = 0$

**A51** Bereken exact de oplossingen.

**a** $\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

**b** $\cos(4\pi x) = -1$

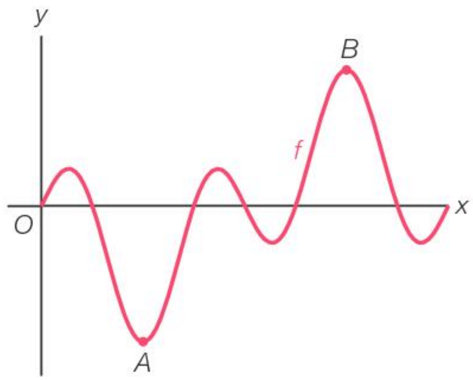
**c** $\sin^2(\frac{1}{4}\pi x) = 1$

**d** $\sin(2x)\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

**A52** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$ met domein $[0, 2\pi]$.
In figuur 8.31 zie je de grafiek van $f$ met de toppen $A(\frac{1}{2}\pi, -2)$ en $B(1\frac{1}{2}\pi, 2)$.

**a** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**b** Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door de punten $A$ en $B$ de $x$-as snijdt in een snijpunt van de grafiek van $f$ met de $x$-as.



**figuur 8.31**

Op de grafiek van $f$ liggen de punten $C(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ en $D(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$.

**c** Toon dit aan.

**d** Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door de punten $C$ en $D$ de $x$-as snijdt in een snijpunt van de grafiek van $f$ met de $x$-as.

**O53** Gegeven is de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

**a** Licht toe dat $x = \frac{1}{6}\pi$ een oplossing is.

**b** Waarom is $x = 2\frac{1}{6}\pi$ een oplossing? En $x = 4\frac{1}{6}\pi$?

**c** Licht toe dat $x = \frac{5}{6}\pi$ een oplossing is.

**d** Waarom is $x = 2\frac{5}{6}\pi$ een oplossing? En $x = -1\frac{1}{6}\pi$?

## Theorie B $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

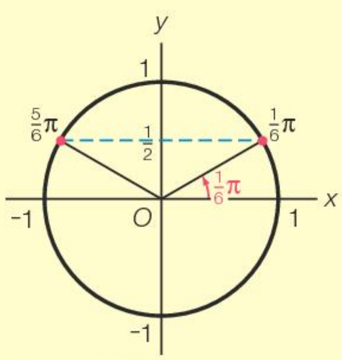
In opgave 53 heb je gezien dat bij de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ twee rijtjes oplossingen horen.

Omdat $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ is het ene rijtje $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Omdat ook $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ is het andere rijtje $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

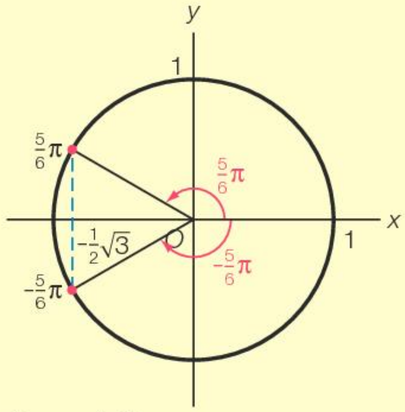
De oplossingen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$ zijn gevonden met de exacte-waarden-cirkel.

Merk op dat $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi$.



**figuur 8.32**

Bij het vinden van de rijtjes oplossingen van de vergelijking $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gebruik je figuur 8.33.
Je krijgt
$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

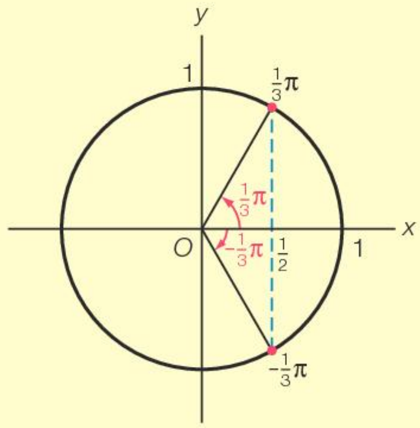



**figuur 8.33**

**De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op door uit de exacte-waarden-cirkel één oplossing $B$ af te lezen.**
**Daarna gebruik je**
**$\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$**
**$\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$**

Neem je bij het rijtje $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ voor $k$ de waarde $-1$, dan krijg je de oplossing $x = \frac{5}{6}\pi - 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -1\frac{1}{6}\pi$.
Voor $k = 3$ krijg je de oplossing $x = \frac{5}{6}\pi + 3 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 6\pi = 6\frac{5}{6}\pi$.

Zoek je de oplossingen van de vergelijking $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ met $x$ in $[0, 2\pi]$ dan schrijf je eerst de twee rijtjes oplossingen op.
$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
Het eerste rijtje oplossingen levert
⋮
$x = \frac{1}{6}\pi + -1 \cdot \pi = -\frac{5}{6}\pi$ niet in $[0, 2\pi]$
$x = \frac{1}{6}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{1}{6}\pi$ wel in $[0, 2\pi]$
$x = \frac{1}{6}\pi + 1 \cdot \pi = 1\frac{1}{6}\pi$ wel in $[0, 2\pi]$
$x = \frac{1}{6}\pi + 2 \cdot \pi = 2\frac{1}{6}\pi$ niet in $[0, 2\pi]$
⋮
Het tweede rijtje oplossingen levert
⋮
$x = -\frac{1}{6}\pi + 0 \cdot \pi = -\frac{1}{6}\pi$ niet in $[0, 2\pi]$
$x = -\frac{1}{6}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{5}{6}\pi$ wel in $[0, 2\pi]$
$x = -\frac{1}{6}\pi + 2 \cdot \pi = 1\frac{5}{6}\pi$ wel in $[0, 2\pi]$
$x = -\frac{1}{6}\pi + 3 \cdot \pi = 2\frac{5}{6}\pi$ niet in $[0, 2\pi]$
⋮




**figuur 8.34**

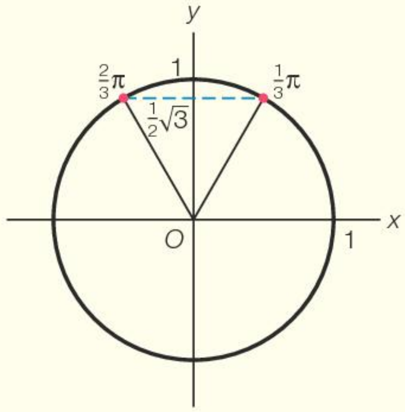
De oplossingen van de vergelijking $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ met $x$ in $[0, 2\pi]$ zijn dus $x = \frac{1}{6}\pi, x = 1\frac{1}{6}\pi, x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

### Voorbeeld

**a** Bereken exact de oplossingen van $2\sin(3x) = \sqrt{3}$.

**b** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$.

*Uitwerking*

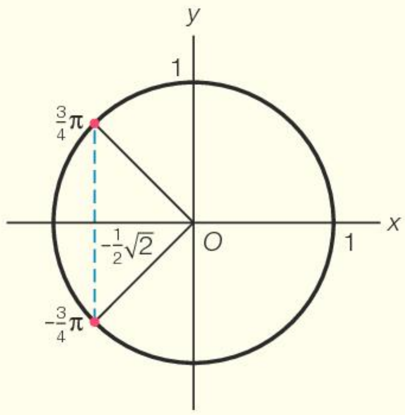



**a** $2\sin(3x) = \sqrt{3}$

$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$




**b** $2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$

$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi$

$x$ in $[0, 2\pi]$ geeft

$x = \frac{13}{24}\pi \vee x = 1\frac{13}{24}\pi \vee x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi$

**54** Bereken exact de oplossingen.

**a** $2\sin(\frac{1}{2}x) = 1$

**b** $2\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

**c** $2\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$

**d** $2\cos(3x - \pi) = -1$

**55** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

**a** $2\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{2}$

**b** $2\cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}$

**c** $\sin(\frac{2}{3}x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

**d** $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

**R56** Gegeven is de vergelijking $2\sin^2(x) = 1$.

**a** Licht toe dat uit $2\sin^2(x) = 1$ volgt $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

**b** Licht toe dat uit $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

**c** Licht toe dat de vier rijtjes van b te noteren zijn als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

**d** Licht toe dat de oplossing $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ ook direct uit de exacte-waarden-cirkel is af te lezen.

**A57** Bereken exact de oplossingen.

**a** $2\cos^2(\tfrac{1}{2}x) = 1$
**b** $4\sin^2(x - \tfrac{1}{6}\pi) = 1$
**c** $4\cos^2(x + \tfrac{1}{4}\pi) = 3$
**d** $4\sin^3(x) - \sin(x) = 0$

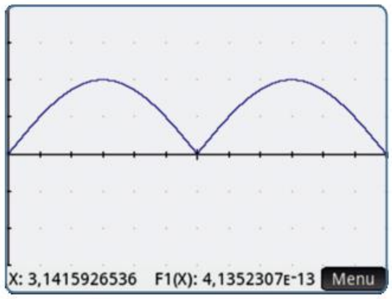
**A58** Bereken algebraïsch de oplossingen in [0, 10].

**a** $\sin(\tfrac{1}{2}\pi x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$
**b** $\cos(\tfrac{1}{3}\pi x) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$
**c** $4\sin^2(\tfrac{1}{5}\pi x) = 1$
**d** $2\cos^2(0{,}1\pi x) + \cos(0{,}1\pi x) = 0$

**A59** Gegeven is de functie $f(x) = -\tfrac{1}{2} + \sin(x - \tfrac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.

**a** Schets de grafiek van $f$.
**b** Bereken exact de coördinaten van de punten waar de grafiek van $f$ de lijn van de evenwichtsstand snijdt.
**c** Bereken exact de coördinaten van de drie toppen van de grafiek.
**d** De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as achtereenvolgens in de punten $A$, $B$ en $C$. Bereken exact de afstand tussen $A$ en $B$.
**e** Los exact op $f(x) \geq -1$.

**A60** Gegeven is de functie $f(x) = |2\sin(x)|$ met $D_f = [0, 2\pi]$.
In de figuur hiernaast is de grafiek van $f$ geplot.
Bereken exact de oplossingen van $f(x) \geq 1$.




**O61** Bereken exact de oplossingen.

**a** $\sin(3x) = \sin(\tfrac{1}{6}\pi)$
**b** $\cos(3x) = \cos(\tfrac{1}{6}\pi)$

## Theorie C sin(*A*) = sin(*B*) en cos(*A*) = cos(*B*)

Zoals uit $\sin(3x) = \sin(\tfrac{1}{6}\pi)$ volgt

$3x = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$,

volgt uit $\sin(3x) = \sin(x)$ dat

$3x = x + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi - x + k \cdot 2\pi$.

Zoals uit $\cos(3x) = \cos(\tfrac{1}{6}\pi)$ volgt

$3x = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$,

volgt uit $\cos(3x) = \cos(x)$ dat

$3x = x + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x + k \cdot 2\pi$.

**$\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$**
**$\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$**

### Voorbeeld

**a** Los algebraïsch op $\sin(x+1) = \sin(2x-3)$.

**b** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $\cos(3x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.

*Uitwerking*

**a** $\sin(x+1) = \sin(2x-3)$

$x + 1 = 2x - 3 + k \cdot 2\pi \vee x + 1 = \pi - (2x-3) + k \cdot 2\pi$

$-x = -4 + k \cdot 2\pi \vee x + 1 = \pi - 2x + 3 + k \cdot 2\pi$

$x = 4 - k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi + 2 + k \cdot 2\pi$

$x = 4 + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Je mag $x = 4 - k \cdot 2\pi$ ook schrijven als $x = 4 + k \cdot 2\pi$, want dit geeft hetzelfde rijtje oplossingen.

**b** $\cos(3x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$

$3x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -(x - \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi$

$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee 4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$x$ in $[0, 2\pi]$ geeft

$x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = \frac{1}{16}\pi \vee x = \frac{9}{16}\pi \vee x = 1\frac{1}{16}\pi \vee x = 1\frac{9}{16}\pi$

**62** Los algebraïsch op.

**a** $\sin(x+1) = \sin(2x+3)$

**b** $\cos(2x-1) = \cos(x+1)$

**c** $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

**d** $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x)$

**e** $\sin(2\pi x) = \sin(\pi(x-1))$

**f** $\cos(\frac{1}{2}\pi x) = \cos(\pi(x-2))$

**A63** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

**a** $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$

**b** $\cos(3x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x - \frac{1}{4}\pi)$

**A64** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ en $g(x) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Los exact op $f(x) < g(x)$.

**O65** Gegeven is de functie $f(x) = \tan(x)$.

**a** Plot de grafiek. Neem $x$ tussen 0 en $2\pi$ en $y$ tussen $-5$ en 5.

**b** De grafiek van $f$ heeft in $[0, 2\pi]$ twee verticale asymptoten.
Welke lijnen zijn dat, denk je?

**O66** Er geldt $\tan(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$.

**a** Licht dit toe.

**b** Bereken exact de oplossingen van $\tan(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$.

## Theorie D De tangensfunctie

Je weet dat voor de draaiingshoek $\alpha$ van het punt $P(x_P, y_P)$ op de eenheidscirkel geldt $\tan(\alpha) = \dfrac{y_P}{x_P}$.

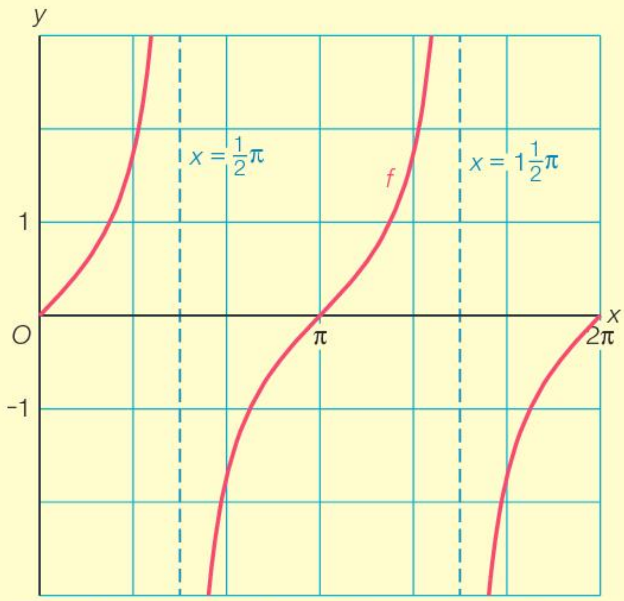
Bij de draaiingshoek $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ is $P(0, 1)$, dus $\tan(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{1}{0}$ en dit bestaat niet. De lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ is een verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \tan(x)$.

Bij de draaiingshoek $\alpha = 1\frac{1}{2}\pi$ is $P(0, -1)$, dus ook $\tan(1\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{-1}{0}$ bestaat niet. Ook de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$ is een verticale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \tan(x)$.

In figuur 8.35 zie je de grafiek van $f(x) = \tan(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
Daarbij is de volgende tabel gebruikt.

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $1\frac{1}{4}\pi$ | $1\frac{1}{2}\pi$ | $1\frac{3}{4}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan(x)$ | $0$ | $1$ | $-$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $-$ | $-1$ | $0$ |

Het punt $(0, 0)$ is een beginpunt van de grafiek.




**figuur 8.35** De grafiek van $f(x) = \tan(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

In opgave 66 heb je gezien dat geldt $\tan(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$.
Ook de vergelijkingen $\tan(A) = C$ met $C = -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1$ en $\sqrt{3}$ zijn exact op te lossen.
Je gebruikt de volgende tabel en dat de grafiek van $f(x) = \tan(x)$ periodiek is met periode $\pi$.

| $x$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan(x)$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |

Bij het exact oplossen van de vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ gebruik je

**$\tan(A) = \tan(B)$ geeft $A = B + k \cdot \pi$**

**67** 

**a** $\tan(3x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

**b** $1 - \tan(\frac{3}{4}x) = 2$

**c** $\tan(\frac{1}{2}x) = \tan(2x - \frac{1}{6}\pi)$

**d** $3\tan(\frac{1}{2}\pi x) = \sqrt{3}$

**e** $2 + \sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{8}\pi x) = 5$

**f** $\tan(\frac{1}{3}\pi x) = \tan(\frac{1}{4}\pi(x-1))$

Bereken exact de oplossingen.

**68** Op het interval $[0, 3\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 2 + \tan(\frac{1}{2}x)$.

**a** Geef van de grafiek van $f$ een beginpunt, de periode en de asymptoten.

**b** Schets de grafiek van $f$.

**c** De functie heeft één nulpunt.
Bereken dit nulpunt. Rond af op twee decimalen.

**d** De lijn $y = 3$ snijdt de grafiek van $f$ twee keer.
Bereken de exacte coördinaten van deze snijpunten.

**69** Op het interval $[0, 4\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 1 - \tan(\frac{2}{3}x)$.

**a** Geef van de grafiek van $f$ een beginpunt, de periode en de asymptoten.

**b** Schets de grafiek van $f$.

**c** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**d** Los exact op $f(x) < 2$.

**A70** Op het interval $[0, 12]$ is gegeven de functie $f(x) = 3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x)$.

**a** Geef van de grafiek van $f$ een beginpunt, de periode en de asymptoten.

**b** Schets de grafiek van $f$.

**c** Los algebraïsch op $f(x) > 4$.

**d** Los op $f(x) > x$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

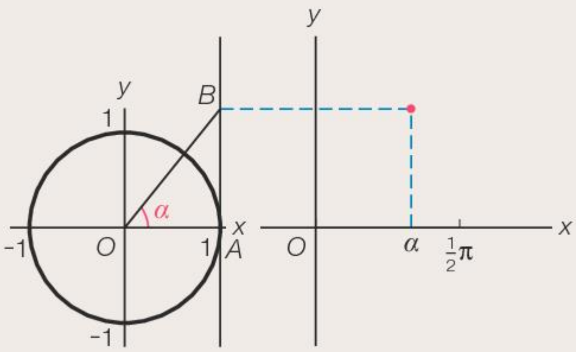
**A71** Los exact de vergelijking $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$ op.

INFORMATIEF

## De tangensfunctie

De naam tangens komt van het Latijnse woord tangere dat raken betekent.
Teken je aan de eenheidscirkel een raaklijn in het punt $A(1, 0)$ en snijdt het tweede been van de draaiingshoek $\alpha$ deze raaklijn in het punt $B$, dan geldt $\tan(\alpha) = AB$, immers $\tan(\alpha) = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$. Zie de figuur hiernaast.

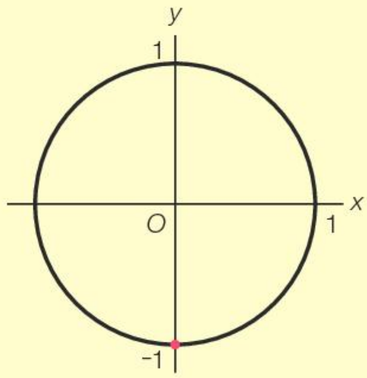
Door bij elke hoek $\alpha$ op de $x$-as het lijnstuk $AB$ verticaal uit te zetten ontstaat de grafiek van de tangens.



# Terugblik

### De vergelijkingen sin($A$) = $C$ en cos($A$) = $C$ met $C$ = –1, 0, 1

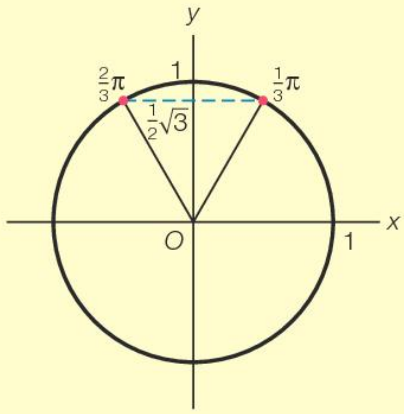
Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met de eenheidscirkel.
Bij $\sin(x) = -1$ hoort het punt met $y$-coördinaat $-1$ op de eenheidscirkel, dus het punt $(0, -1)$ en hierbij hoort een draaiingshoek van $1\frac{1}{2}\pi$.
Zo krijg je $\sin(x) = -1$ geeft $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$. Hierin is $k$ een geheel getal.
Uit $\cos(A) = 0$ volgt $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Dit gebruik je bij het oplossen van $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$.




Je krijgt $2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, dus $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

### De vergelijkingen sin($A$) = $C$ en cos($A$) = $C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op met de exacte-waarden-cirkel.
Bij $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{3}\pi$ en $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$. Er zijn twee rijtjes oplossingen:
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

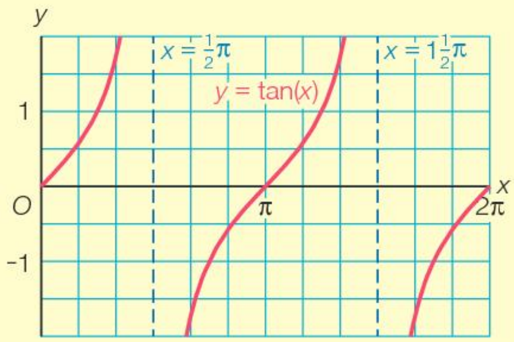



### De vergelijkingen sin($A$) = sin($B$) en cos($A$) = cos($B$)

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijkingen $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$ gebruik je de regels $\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$ en $\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.

### De grafiek van $f(x) = \tan(x)$

De grafiek van $y = \tan(x)$ is periodiek met periode $\pi$.
De grafiek heeft in het interval $[0, 2\pi]$ twee verticale asymptoten. Dat zijn de lijnen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
Bij het tekenen van de grafiek van $y = \tan(x)$ op $[0, 2\pi]$ gebruik je verder de punten $(0, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, 1)$, $(\frac{3}{4}\pi, -1)$, $(\pi, 0)$, $(1\frac{1}{4}\pi, 1)$, $(1\frac{3}{4}\pi, -1)$ en $(2\pi, 0)$.

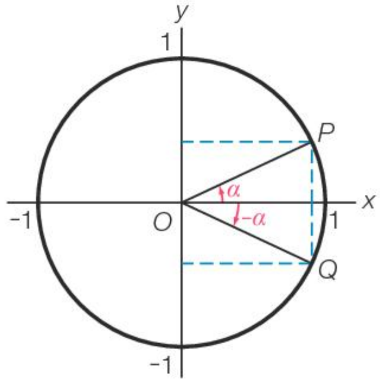



Vergelijkingen van het type $\tan(A) = C$ met $C = -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1$ en $\sqrt{3}$ kun je exact oplossen.

De vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ geeft $A = B + k \cdot \pi$.

# 8.4 Herleiden en differentiëren

**072** Gegeven is het punt $P$ op de eenheidscirkel. De draaiingshoek van $P$ is $\alpha$. Het punt $Q$ is het spiegelbeeld van $P$ in de $x$-as, dus de draaiingshoek van $Q$ is $-\alpha$. Zie figuur 8.36.
Licht toe dat $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en dat $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Gebruik figuur 8.36.




**figuur 8.36**

## Theorie A Goniometrische formules herleiden

In opgave 72 heb je gezien dat $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

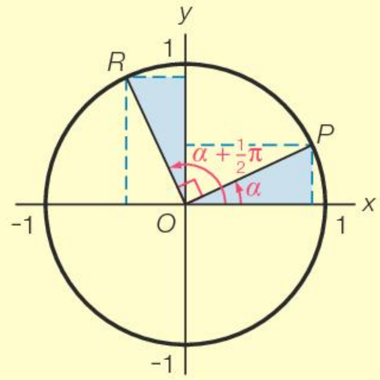
Zie figuur 8.37. Het punt $P$ ligt op de eenheidscirkel en de draaiingshoek van $P$ is $\alpha$. Punt $R$ is het beeld van $P$ bij draaiing om $O$ over $\frac{1}{2}\pi$, dus de draaiingshoek van $R$ is $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ en ook geldt $x_R = -y_P$ en $y_R = x_P$. Dus

$\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = y_R = x_P = \cos(\alpha)$ en

$\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = x_R = -y_P = -\sin(\alpha)$.

Door de formule $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \cos(\alpha)$ te schrijven als

$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ is deze te gebruiken om een cosinus om te zetten in een sinus.




**figuur 8.37**

Voor het omzetten van een sinus in een cosinus gebruik je de formule $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi)$. Deze formule toon je aan in opgave 73.
Verder toon je in deze opgave aan dat $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ en $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Uit de definities van $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ volgt direct $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Hieronder staan deze formules genoteerd met $A$ in plaats van $\alpha$. Hiermee geven we aan dat je voor $A$ elke uitdrukking kunt invullen.

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(-A) = -\sin(A)$ | $\cos(-A) = \cos(A)$ | $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ |
| $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ | $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$ | $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$ |
| $\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$ | $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ | |

Neem je in de formule $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ voor $A$ de uitdrukking $2x - \frac{1}{4}\pi$, dan krijg je

$\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = \sin(2x - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + \frac{1}{4}\pi)$.

Leer de formules die hierboven staan uit je hoofd!

## Voorbeeld

Herleid $-\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

*Uitwerking*

$$-\cos(2x - \tfrac{1}{3}\pi) = \cos(2x - \tfrac{1}{3}\pi + \pi) = \cos(2x + \tfrac{2}{3}\pi) = \sin(2x + \tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\pi) = \sin(2x + 1\tfrac{1}{6}\pi)$$

$\boxed{-\cos(A) = \cos(A + \pi)}$ $\boxed{\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)}$

**73** Toon aan met behulp van de eenheidscirkel.

**a** $\cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\alpha)$

**b** $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$

**c** $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$

**d** $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

**74**

**a** Herleid $\sin(x + \frac{1}{6}\pi)$ tot de vorm $\cos(ax + b)$.

**b** Herleid $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

**c** Herleid $-\sin(3x - \frac{2}{3}\pi)$ tot de vorm $\cos(ax + b)$.

**d** Herleid $-\cos(4x + 1\frac{1}{6}\pi)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

**75** Herleid.

**a** $(\sin(x) - \cos(x))^2$

**b** $\dfrac{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}$

**A76**

**a** Druk $\sin^2(x) + 4\cos(x)$ uit in $\cos(x)$.

**b** Druk $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2$ uit in $\sin(x)$.

**c** Druk $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x)$ uit in $\cos(x)$.

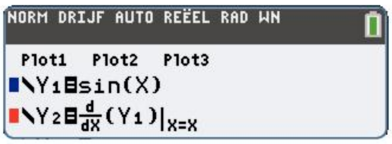
**O77** Je kunt op de GR de grafiek van de afgeleide van een functie plotten door bij $y_2$ de formule van de *numerieke afgeleide* in te voeren. Zie hiernaast.

**a** Plot in één figuur de grafieken van $y = \sin(x)$ en zijn numerieke afgeleide. Neem als domein $[0, 2\pi]$.

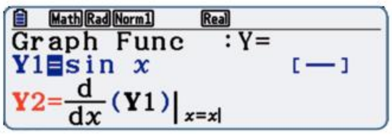
**b** Welke standaardfunctie is vermoedelijk de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$?
Controleer je antwoord op de GR met tabellen.

**c** Plot in één figuur de grafieken van $y = \cos(x)$ en zijn numerieke afgeleide.
Wat is de formule van de afgeleide van $y = \cos(x)$, denk je? Controleer je antwoord met de GR.

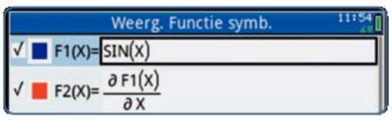
**d** Gebruik dat $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$ en de regels $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ en $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ om aan te tonen dat $g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$.




TI: Gebruik de optie nDerive uit het math-WISK-menu.




Casio: Gebruik de optie d/dx uit het OPTN-CALC-menu.




HP: De juiste optie staat bij de sjablonen.

## Theorie B De afgeleide van sinus, cosinus en tangens

In opgave 77 heb je het volgende ontdekt.

**$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$**
**$g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$**

In het informatief op bladzijde 167 wordt aannemelijk gemaakt dat $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$. Daarbij is de hoek in radialen uitgedrukt. Daarom geldt deze regel alleen als $x$ in radialen is uitgedrukt.

Voor het berekenen van de afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ gebruik je de formule $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$ en de quotiëntregel.

Je krijgt $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Dit geeft

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Deze afgeleide kun je op twee manieren herleiden.

- Met de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ krijg je
  $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
- Uitdelen en de formule $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$ geeft
  $f'(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x)$.

**Uitdelen**
$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

**$f(x) = \tan(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$**

Bij het differentiëren van goniometrische functies heb je vaak de kettingregel nodig.

Bij het differentiëren van $f(x) = \sin(3x)$ krijg je $f'(x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3\cos(3x)$.

Bij het differentiëren van $g(x) = \sin(x^3)$ krijg je $g'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2\cos(x^3)$.

Bij het differentiëren van $h(x) = \sin^3(x)$ krijg je $h'(x) = 3(\sin(x))^2 \cdot \cos(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$.

Met behulp van de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ is $h'(x)$ uit te drukken in $\cos(x)$. Immers $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, dus $h'(x) = 3(1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) = 3\cos(x) - 3\cos^3(x)$.

### Voorbeeld

Differentieer.

**a** $f(x) = 1 + 2\cos(3(x - \frac{1}{12}\pi))$
**b** $g(x) = x\sin(x)$
**c** $h(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{\sin(x)}$
**d** $j(x) = x^2\tan(x)$

$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$
(productregel)
$\left[\dfrac{t}{n}\right]' = \dfrac{nt' - tn'}{n^2}$
(quotiëntregel)

*Uitwerking*

**a** $f(x) = 1 + 2\cos(3(x - \frac{1}{12}\pi)) = 1 + 2\cos(3x - \frac{1}{4}\pi)$ geeft
$f'(x) = -2\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) \cdot 3 = -6\sin(3x - \frac{1}{4}\pi)$ — de kettingregel

**b** $g(x) = x\sin(x)$ geeft $g'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ — de productregel
$= \sin(x) + x\cos(x)$

**c** $h(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{\sin(x)}$ geeft

$$h'(x) = \frac{\sin(x) \cdot (1 - \sin(x)) - (x + \cos(x)) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$ de quotiëntregel

$$= \frac{\sin(x) - \sin^2(x) - x\cos(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin(x) - x\cos(x) - 1}{\sin^2(x)}$$

**d** $j(x) = x^2\tan(x)$ geeft
$j'(x) = 2x \cdot \tan(x) + x^2 \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2x\tan(x) + x^2 + x^2\tan^2(x)$

**78** Bereken de afgeleide.

**a** $f(x) = 3 + 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$
**b** $g(x) = x\cos(x)$
**c** $h(x) = \dfrac{x^2 + \sin(x)}{\cos(x)}$
**d** $k(x) = \cos^2(x)$
**e** $l(x) = x + 3\sin^2(x)$
**f** $j(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

**79** Differentieer.

**a** $f(x) = 10 + 16\cos(\frac{1}{2}(x - 1))$
**b** $g(x) = x^2\sin(3x)$
**c** $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2 + \cos(x)}$
**d** $j(x) = 2\sin^2(x)$

**80** Differentieer.

**a** $f(x) = x\cos(2x)$
**b** $g(x) = 2x\sin(3x - 1)$
**c** $h(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x + \sin(x)}$
**d** $j(x) = 1 + 2\cos^2(x)$

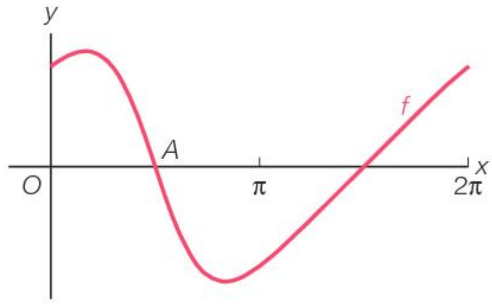
**81** ☐⊙✱
**a** Differentieer $f(x) = 3\tan(2x)$.
**b** Toon aan $g(x) = \tan^2(x)$ geeft $g'(x) = \dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$.

**A82** ☐⊙✱
Bereken de afgeleide.
**a** $f(x) = \cos^3(x)$
**b** $g(x) = \cos(x^3)$
**c** $h(x) = \sqrt{\sin(x)}$
**d** $j(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

**A83** ☐⊙✱
**a** Toon aan $f(x) = \sin^3(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 4\cos(x) - 3\cos^3(x)$.
**b** Druk de afgeleide van $g(x) = \sin^2(x)\cos(x)$ uit in $\sin(x)$.
**c** Toon aan $h(x) = \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$ geeft $h'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

**A84** ☐⊙✱
Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3\cos(x)}{2 - \sin(x)}$ met domein $[0, 2\pi]$.
De afgeleide is te herleiden tot $f'(x) = \dfrac{-6\sin(x) + 3}{(2 - \sin(x))^2}$.
**a** Toon aan dat deze afgeleide juist is.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $f$. Het punt $A$ is een snijpunt van de grafiek met de $x$-as.
**b** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn $k$ van de grafiek in $A$.
**c** Bereken exact het bereik van $f$.



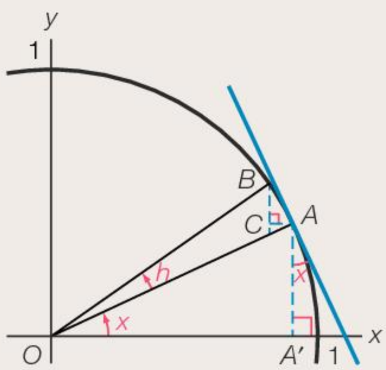
**figuur 8.38**

**A85** ✱
Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \cos^2(x) + \cos(x) + p$ met domein $[0, \pi]$.
Bereken exact voor welke $p$ het minimum van $f_p$ gelijk is aan 1.

INFORMATIEF

## De afgeleide van *f*(x) = sin(x)

We maken als volgt aannemelijk dat de regel $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$ geldt.
Hiernaast is in de eenheidscirkel de draaiingshoek van punt $A$ gelijk aan $x$ en van punt $B$ gelijk aan $x + h$.
Uit de definitie van de radiaal volgt dat booglengte $AB = h$.
Voor kleine waarden van $h$ is booglengte $AB \approx$ lijnstuk $AB$ en $\angle ABC \approx x$.
Met de definitie van de afgeleide krijg je $f(x) = \sin(x)$




$$\text{geeft } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{y_B - y_A}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{y_B - y_C}{\text{booglengte } AB}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{BC}{\text{lijnstuk } AB} = \lim_{h \to 0} \cos(\angle ABC) = \cos(x).$$

# Terugblik

## Goniometrische formules herleiden

$\sin(-A) = -\sin(A)$ | $\cos(-A) = \cos(A)$

$-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ | $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$

$\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$ | $\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$

$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ | $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$

Met de formules hierboven is $-\sin(2x + \frac{1}{4}\pi)$ te herleiden tot de vorm $\cos(ax + b)$.
Je krijgt $-\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sin(2x + 1\frac{1}{4}\pi) = \cos(2x + \frac{3}{4}\pi)$.

Ook kun je $2\sin^2(x) + 3\cos(x)$ uitdrukken in $\cos(x)$.
Je krijgt
$2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 2(1 - \cos^2(x)) + 3\cos(x) = 2 - 2\cos^2(x) + 3\cos(x)$.

## Afgeleide van sinus, cosinus en tangens

$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$
$g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$
$h(x) = \tan(x)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Bij het berekenen van de afgeleide heb je vaak de kettingregel nodig.
$f(x) = \cos(4x)$ geeft $f'(x) = -\sin(4x) \cdot 4 = -4\sin(4x)$
$g(x) = \cos(x^4)$ geeft $g'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3 = -4x^3\sin(x^4)$
$h(x) = \cos^4(x)$ geeft $h'(x) = 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x) = -4\sin(x)\cos^3(x)$

## De productregel en de quotiëntregel

Bij het differentiëren van $f(x) = x^3\sin(x)$ heb je de productregel nodig.
Je krijgt $f'(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$.

Bij het differentiëren van $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^3 + \sin(x)}$ heb je de quotiëntregel nodig.

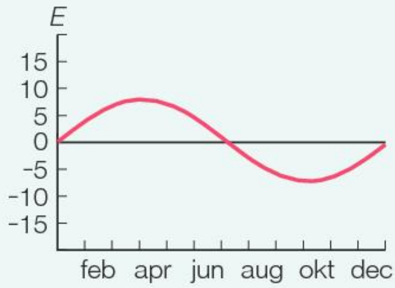
$$\begin{aligned}\text{Je krijgt } g'(x) &= \frac{(x^3 + \sin(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (3x^2 + \cos(x))}{(x^3 + \sin(x))^2} \\ &= \frac{x^3\cos(x) + \sin(x)\cos(x) - 3x^2\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{(x^3 + \sin(x))^2} \\ &= \frac{x^3\cos(x) - 3x^2\sin(x)}{(x^3 + \sin(x))^2}.\end{aligned}$$

# Eindopdracht Formules bij tijdvereffening

In de beginopdracht heb je gezien dat de tijdvereffening wordt veroorzaakt door twee verschijnselen.

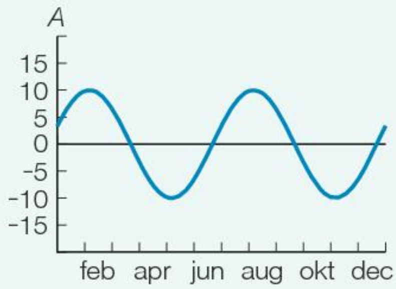
I De aarde draait in een licht elliptische baan om de zon. Daardoor beweegt de zon in januari iets sneller aan de hemel dan in juli.
In de figuur hiernaast is het gevolg hiervan grafisch weergegeven. De grafiek is een sinusoïde.

- Stel de formule op van deze sinusoïde. Neem daarbij de tijd $t$ in dagen met $t = 0$ op 1 januari. Gebruik dat de afwijking nul is op 3 januari en op 4 juli en dat de maximale afwijking 7,6 minuten is.



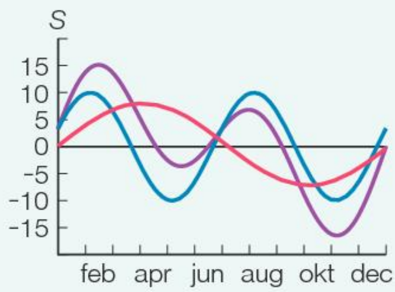

II De schuine stand van de aardas ten opzichte van het baanvlak van de aarde. Aan het begin van de zomer en aan het begin van de winter is de aardas naar de zon toe gekanteld en is de baan van de zon vrijwel van oost naar west gericht. Het duurt dan relatief lang voordat de aardrotatie deze beweging inhaalt. Aan het begin van de lente en aan het begin van de herfst staat de aardas scheef voor de zon. Nu wordt de baanbeweging sneller ingelopen door de draaiing van de aarde om zijn as.
Ook bij deze invloed hoort een sinusoïde die het verband aangeeft tussen de tijd $t$ in dagen met $t = 0$ op 1 januari en de afwijking in minuten. Zie de figuur hiernaast.

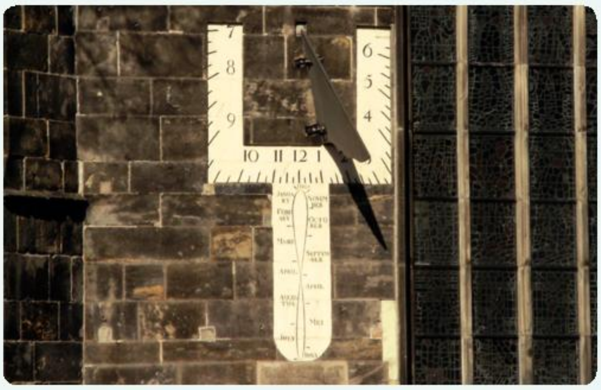
- Stel de formule op van deze sinusoïde. Gebruik dat de maximale afwijking 10,0 minuten is en dat op 21 maart, 21 juni, 22 september en 21 december de afwijking nul is.




De tijdvereffening $S$ krijg je door de som van deze twee verschijnselen te nemen.

- Gebruik de somformule $S = E + A$ om te berekenen op welke data de tijdvereffening een maximum en een minimum bereikt. Hoeveel minuten zijn deze extremen?



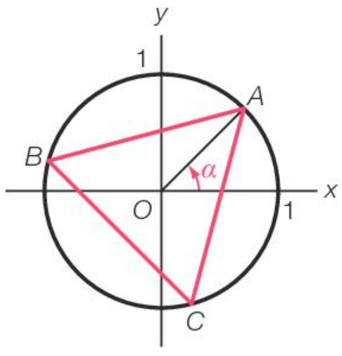



De zonnewijzer op de Grote Kerk in Enschede.

# Diagnostische toets

### 8.1 Eenheidscirkel en radiaal

**1** De hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek $ABC$ liggen op de eenheidscirkel. De draaiingshoek $\alpha$ is 40°. Zie figuur 8.39.
Bereken de coördinaten van de punten $A$, $B$ en $C$.
Rond af op twee decimalen.



**figuur 8.39**

**2** De punten $P$ en $Q$ liggen op de eenheidscirkel waarbij $x_P = -0{,}33$, $y_Q = 0{,}22$ en $\angle POQ$ scherp is.
Bereken beide mogelijkheden voor $\angle POQ$. Geef het antwoord in radialen en rond af op twee decimalen.

**3** Geef de exacte waarde van $x$.

**a** $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ met $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$

**b** $x = \cos(\frac{3}{4}\pi)$

**c** $\cos(x) = \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$

**d** $x = \sin(1\frac{2}{3}\pi)$

**e** $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 1\frac{1}{2}\pi$

**f** $x = \cos(1\frac{2}{3}\pi)$

### 8.2 Sinusoïden

**4** Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

**a** $f(x) = -4 + 3{,}1\sin(x + \frac{2}{3}\pi)$

**b** $g(x) = 3{,}4 - 4\cos(5(x - 0{,}4))$

**5** **a** Teken de grafiek van $f(x) = -2 - 3\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 4\pi]$.

**b** Teken de grafiek van $g(x) = 1 + 3\cos(\frac{1}{2}\pi x - \pi)$ met domein $[0, 10]$.

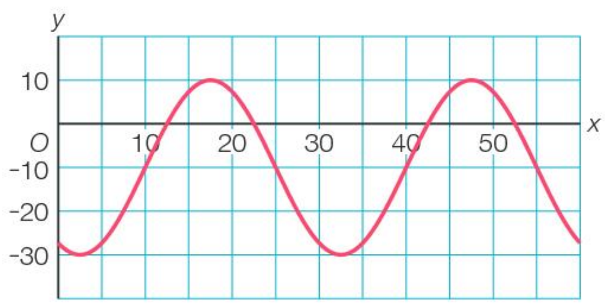
**6** In figuur 8.40 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

**a** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$

**b** $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$

**c** $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$

**d** $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$



**figuur 8.40**

## 8.3 Goniometrische vergelijkingen

**7** Bereken exact de oplossingen.

**a** $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = -1$

**b** $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$

**c** $\cos(1\frac{1}{2}\pi x) \cdot (\cos(2\pi x) + 1) = 0$

**d** $\sin^3(\frac{1}{3}\pi x) + \sin^2(\frac{1}{3}\pi x) = 0$

**8** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

**a** $4\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$

**b** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

**c** $4\cos^2(\frac{1}{2}x) = 2$

**d** $\sin^2(\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi) = \frac{3}{4}$

**9** Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2\cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de punten waar de grafiek van $f$ de lijn van de evenwichtsstand snijdt.

**b** Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van $f$.

**c** De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as van links naar rechts in de punten $A$, $B$, $C$ en $D$.
Bereken exact de afstand tussen $B$ en $C$.

**d** Los exact op $f(x) \geq -1 + \sqrt{3}$.

**10** Bereken exact de oplossingen.

**a** $\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$

**b** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(4x + \frac{1}{4}\pi)$

**c** $\tan(\frac{2}{3}\pi x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

**d** $\tan(2x - \frac{1}{3}\pi) = \tan(x + \frac{1}{2}\pi)$

**11** Op het interval $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 2 - \tan(1\frac{1}{2}x)$.

**a** Geef van de grafiek van $f$ een beginpunt, de periode en de asymptoten.

**b** Schets de grafiek van $f$.

**c** Los algebraïsch op $f(x) \leq 3$.

## 8.4 Herleiden en differentiëren

**12** **a** Herleid $\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ tot de vorm $\cos(ax + b)$.

**b** Herleid $-\cos(5x + 1\frac{1}{4}\pi)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

**c** Druk $(\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \cdot \cos(x)$ uit in $\cos(x)$.

**13** Differentieer.

**a** $f(x) = x^3\sin(4x)$

**b** $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2 + \cos(x)}$

**c** $h(x) = 5\sin^2(x)$

**d** $j(x) = \tan(x^3)$

**14** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2 + \sin(x)}$.
Op de grafiek van $f$ ligt het punt $A$ met $x_A = \frac{1}{2}\pi$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn $k$ van de grafiek in $A$.

# Gemengde opgaven

### 5 Machten, exponenten en logaritmen

**1** **a** Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

$a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}$ $\quad (81p^2)^{-\frac{3}{4}}$ $\quad \dfrac{10a^{-5}}{(4a)^{-1\frac{1}{2}}}$

**b** Schrijf als macht van $x$.

$x^4 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$ $\quad \dfrac{x^2}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ $\quad \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}$

**2** **a** Schrijf $y = \dfrac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3}$ in de vorm $y = ax^p$.

**b** Schrijf $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

**c** Schrijf $y = 4x^{-1\frac{2}{3}} \cdot (3x^4)^2$ in de vorm $x = ay^b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

**d** Schrijf $A = 6 + 2\sqrt{3B+2}$ in de vorm $B = aA^2 + bA + c$.

**3** Los exact op.

**a** $(x^{\frac{1}{2}} - 4)(2x^{\frac{2}{3}} - 16) = 0$

**b** $\frac{1}{2}(2x^2 - 5)^{1\frac{1}{2}} = 4$

**c** $2^{x+4} - 2^{x+3} = 16\sqrt{2}$

**d** $5 \cdot 2^{5x-1} + 6 = 56$

**e** ${}^3\log(3^{x-1} + 5) = 2$

**f** $2^{2x+3} + 2^{x+5} = 168$

**4** Gegeven zijn de functies $f(x) = -2 + \sqrt{6-3x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{4x+10}$.

**a** Hoe ontstaat de grafiek van $f$ uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?

**b** Schets de grafieken van $f$ en $g$ in één figuur.

**c** Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

**d** Los op $f(x) - g(x) < \frac{1}{4}$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

**e** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x > -10$?

**5** Los exact op.

**a** $(2x-5)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

**b** $(\frac{1}{2}x^2 + 9) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + 9} = 81$

**c** $(\sqrt{3})^{x+2} = 9\sqrt{3}$

**d** $4^x + 48 = 2^{x+4}$

**e** ${}^5\log(x^2 \cdot \sqrt{x} - 7) = 2$

**f** $5^x - 6 \cdot (\frac{1}{5})^x = 5$

**6** Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}4 \cdot 2^{x-2} - 4$ en $h(x) = 5 - 0{,}2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1}$.

**a** Hoe ontstaat de grafiek van $f$ uit een standaardgrafiek?

De grafiek van $h$ wordt 6 naar rechts en 4 naar beneden geschoven.
Zo ontstaat de grafiek van de functie $k(x) = a + b \cdot g^x$.

**b** Bereken exact $a$, $b$ en $g$.

**c** Schets de grafieken van $f$ en $h$ in één figuur.

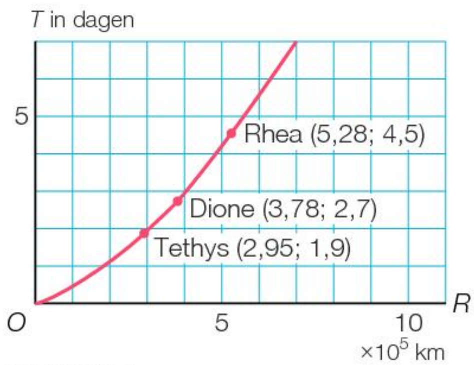
**d** Los algebraïsch op $f(x) \geq 4$.

**e** De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van $f$ in het punt $A$ en de grafiek van $h$ in het punt $B$.
Bereken voor welke $p$ de lengte van het lijnstuk $AB$ gelijk is aan 3.
Rond af op twee decimalen.

**f** Voor welke $q$ heeft de vergelijking $f(x) = q$ één oplossing en de vergelijking $h(x) = q$ geen oplossing?

**7** Op de grafieken van $f(x) = \sqrt{2x-4}$ en $g(x) = \sqrt{x+1}$ wordt eerst de vermenigvuldiging met $a$ ten opzichte van de $y$-as toegepast en vervolgens de translatie $(0, b)$.
De beeldgrafieken gaan door het punt $A(4, 5)$.
Bereken exact $a$ en $b$.

**8** De planeet Saturnus heeft veel manen. In de grafiek van figuur G.1 is voor drie van die manen het verband tussen de omlooptijd $T$ in dagen en de straal $R$ van de baan in $10^5$ km af te lezen.
Sterrenkundigen hebben aangetoond dat $T = a \cdot R^{1{,}5}$.
Uit de gegevens in de figuur volgt dat $a$, afgerond op twee decimalen, gelijk is aan 0,37.



**figuur G.1**

**a** Toon dit aan.

**b** De baan van de maan Iapetus heeft een straal van $3{,}56 \cdot 10^6$ km.
Hoeveel dagen is de omlooptijd?

**c** De straal van de baan van de maan Titan is 2,3 keer de straal van de baan van de maan Rhea.
Hoeveel keer zo groot is de omlooptijd?

**d** Schrijf de formule $T = 0{,}37R^{1{,}5}$ in de vorm $R = p \cdot T^q$. Rond $p$ en $q$ af op twee decimalen.

**e** In 1980 heeft de Voyager enkele tot dan toe onbekende manen van Saturnus gefotografeerd. Van een van deze manen, de 1980S.27, is de omlooptijd 15 uur.
Bereken de straal van de baan.

**9** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + {}^{3}\log(2x + 4)$ en $g(x) = 3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(8 - x)$.

**a** Bereken van beide functies het domein en geef de formule van de asymptoot van de grafiek.
**b** Schets de grafieken van $f$ en $g$ in één figuur.
**c** Los algebraïsch op $f(x) \leq 5$.
**d** De lijn $y = 2$ snijdt de grafiek van $f$ in het punt $A$ en de grafiek van $g$ in het punt $B$.
Bereken algebraïsch de lengte van het lijnstuk $AB$.

**10** Uit onderzoek is gebleken dat er voor zoogdieren een verband bestaat tussen de levensverwachting en het gewicht. De bijbehorende formule is $L = 7{,}5G^{0{,}25}$. Hierin is $L$ de levensverwachting van de diersoort in jaren en $G$ het gemiddelde gewicht in kg van volwassen exemplaren.

**a** De ijsbeer heeft een levensverwachting van 34 jaar.
Bereken algebraïsch het gemiddelde gewicht in gehele kg.

Onderzoek wees uit dat er ook een verband bestaat tussen de gemiddelde hartslag $H$ in slagen per minuut en $G$. De bijbehorende formule is $H = 280\,G^{-0{,}25}$.

**b** De spitsmuis heeft een hartslag van 900 slagen per minuut.
Hoeveel hartslagen heeft een spitsmuis naar verwachting in zijn gehele leven?

Een bioloog beweert dat uit de formules volgt dat elk zoogdier in zijn totale leven ongeveer evenveel hartslagen heeft.

**c** Licht toe dat dit betekent dat $L \cdot H$ voor elk zoogdier hetzelfde getal is en bereken dit getal.

## 6 Differentiaalrekening

**11** Differentieer.

**a** $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x^2}{x^6}$

**b** $g(x) = 4x^3 \cdot \sqrt{x} - \dfrac{4}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$

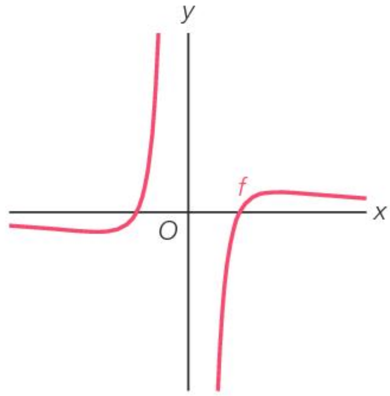
**c** $h(x) = (x\sqrt{x} + 2)^4$

**12** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$.

**a** Bereken exact voor welke $p$ de grafiek van $f_p$ twee buigpunten heeft.
**b** Bereken voor welke $p$ de grafiek van $f_p$ drie raaklijnen heeft die evenwijdig zijn met de lijn $k$: $y = 4x$.

**13** Gegeven is functie $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4} + \dfrac{x}{4x^2+1}$.
Toon met de afgeleide aan dat de functie $f$ extreme waarden heeft voor $x = 1$ en $x = -1$.

**14** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x^2-9}{x^3}$.
- **a** Bereken exact de extreme waarden van $f$.
- **b** De grafiek van $f$ heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt 24.
  Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- **c** Bereken exact voor welke $a$ de parabool $y = ax^2$ de grafiek van $f$ raakt.



**figuur G.2**

**15** **a** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2+4x}$.

Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{3x^3+10x^2}{\sqrt{x^2+4x}}$.

**b** Gegeven is de functie $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4x}}$.

Toon aan dat $g'(x) = \dfrac{x^2+6x}{(x+4)\sqrt{x^2+4x}}$.

**c** Gegeven is de functie $h(x) = \dfrac{5x}{(x^2-2x)^3}$.

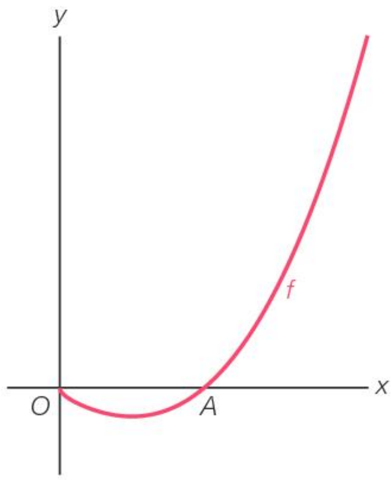
Toon aan dat $h'(x) = \dfrac{5x(4-5x)}{(x^2-2x)^4}$.

**16** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^3 + px^2 - 3x + 8$.
- **a** De functie $f_p$ heeft een extreme waarde voor $x = -\frac{1}{3}$.
  Bereken exact $p$ en de andere extreme waarde.
- **b** De grafiek van $f_p$ heeft buigpunt $A$ met $x_A = 1$.
  Bereken exact $y_A$.
- **c** De lijn $k$: $y = -3x + 12$ raakt de grafiek van $f_p$.
  Bereken exact de waarde van $p$.
- **d** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van $f_p$ liggen.

**17** Gegeven is functie $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}}$.

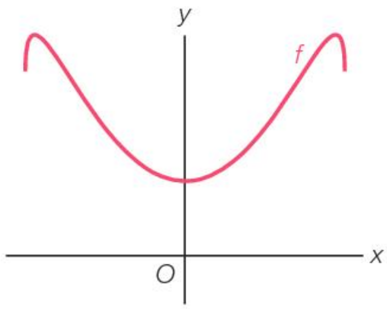
De afgeleide van $f$ is $f'(x) = \dfrac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$.

**a** Bewijs dit.
**b** Bereken exact het minimum van $f$.
**c** De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in het punt $A$.
De lijn $k$ snijdt de grafiek van $f$ loodrecht in $A$.
Toon aan dat $x + 3y\sqrt{2} = 2$ een vergelijking van $k$ is.
**d** De lijn $m$ met richtingscoëfficiënt $16\frac{1}{2}$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $B$.
Stel de formule op van $m$.



**figuur G.3**

**18** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 2$.
Bereken algebraïsch het bereik van $f$.



**figuur G.4**

**19** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x\sqrt{x} + p\sqrt{x}$.
**a** De lijn $k$: $y = 5x + q$ raakt de grafiek van $f_p$ in het punt $A$ met $x_A = 4$.
Bereken exact de waarde van $q$.
**b** Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van $f_p$ liggen.
**c** Bereken algebraïsch voor welke $p$ de grafiek van $f_p$ een top heeft met $y_{top} = -2$.

**20** Gegeven zijn de functies $f(x) = (x + 1)\sqrt{4x^2 + 1}$ en $g_a(x) = 4 + \dfrac{8}{(ax - 2)^2}$.
De grafiek van $f$ snijdt de $y$-as in het punt $A$ en de grafiek van $g_a$ snijdt de $y$-as in het punt $B$.
De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in $A$.
De lijn $l$ raakt de grafiek van $g_a$ in $B$.
Bereken algebraïsch voor welke $a$ de lijnen $k$ en $l$ elkaar
**a** loodrecht snijden
**b** snijden op de $x$-as.

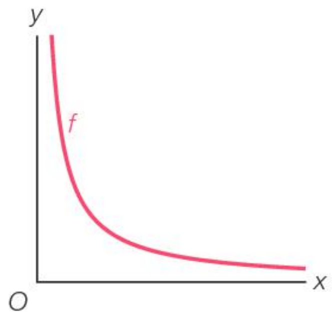
 

**21** Gegeven is functie $f(x) = \dfrac{4}{x}$ met domein $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

Op de grafiek van $f$ ligt het punt $P$ met $x_P = p$.
Voor de lengte $L(p)$ van het lijnstuk $OP$ geldt

$$L(p) = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}.$$

**a** Toon dit aan.
**b** De lijn $k$ raakt de grafiek van $f$ in het punt $P$ waarvoor de lengte van het lijnstuk $OP$ minimaal is.
Onderzoek algebraïsch of $k$ en $OP$ loodrecht op elkaar staan.




**figuur G.5**

**22** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 6}{x\sqrt{x}}$.

De top van de grafiek van $f$ is te schrijven in de vorm $(\sqrt[3]{a}, b\sqrt{a})$.
Bereken exact $a$ en $b$.

**23** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \dfrac{10x + p}{x^2 + 1}$.

De lijn $k$: $y = \frac{2}{3}x + q$ snijdt de grafiek van $f_p$ loodrecht in het punt $A$ met $x_A = 1$.
Bereken exact $p$ en $q$.

## 7 Meetkunde met coördinaten

**24** De lijn $k$ snijdt de assen in de punten $(2p + 1, 0)$ en $(0, 5)$.
De lijn $l$ snijdt de assen in de punten $(2, 0)$ en $(0, q + 2)$.
**a** Voor welke $p$ ligt het punt $A(2, 3)$ op $k$?
**b** Voor welke $p$ en $q$ zijn $k$ en $l$ evenwijdig met de lijn $m$: $y = -2x + 3$?
**c** Voor welke $p$ en $q$ vallen $k$ en $l$ samen?

**25** Gegeven zijn de punten $A(-3, 4)$, $B(1, 6)$ en $C(0, -1)$.
**a** Stel vergelijkingen op van de lijnen $k$ die afstand 2 hebben tot $A$ en door $B$ gaan.
**b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die afstand $2\sqrt{5}$ hebben tot de lijn $AB$.
**c** Bereken de coördinaten van de punten op de lijn $AB$ die afstand 5 hebben tot de lijn $m$: $3x + 4y = 8$.
**d** Bereken de hoek tussen de lijnen $AB$ en $AC$. Rond af op één decimaal.

**26** Gegeven zijn de lijnen $k$: $y = px + 1$ en $l$: $2x + y = 3$.
**a** Neem $p = -3$ en bereken $\angle(k, l)$. Rond af op één decimaal.
**b** Bereken $p$ als gegeven is dat $\angle(k, l) = 15°$. Rond af op drie decimalen.

**27** Gegeven zijn de punten $A(p, 5)$ en $B(5p, 2p + 3)$.
Voor de afstand tussen $A$ en $B$ geldt $d(A, B) = \sqrt{20p^2 - 8p + 4}$.

- **a** Toon dit aan.
- **b** Bereken langs algebraïsche weg voor welke $p$ de afstand tussen $A$ en $B$ groter is dan $4\sqrt{29}$.
- **c** Bereken exact voor welke $p$ het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ op afstand 8 van de cirkel $c$: $x^2 + y^2 = 16$ ligt.
- **d** Van de cirkel $d$ is $AB$ een middellijn.
  Onderzoek op algebraïsche wijze of er een waarde van $p$ is waarvoor $d$ door de oorsprong gaat.

**28** Gegeven is de lijn $k$: $3x - 4y = 6$.

- **a** Stel een vergelijking op van de cirkel $c$ met middelpunt $M(8, 2)$ die $k$ raakt.
- **b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die afstand 3 tot $k$ hebben.
- **c** Bereken de coördinaten van de punten $A$ en $B$ op de lijn $m$: $y = x$ die afstand 4 tot $k$ hebben.

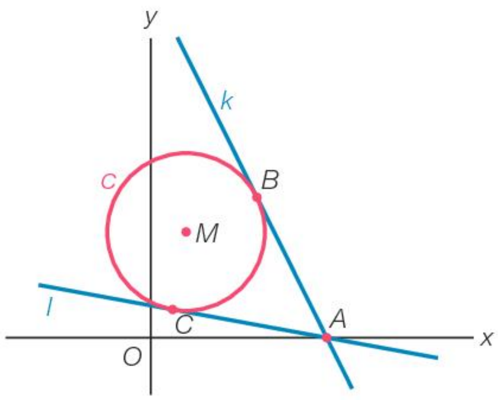
**29** Om een vergelijking op te stellen van de cirkel die door de punten $A$, $B$ en $C$ gaat kun je het volgende werkschema gebruiken.

1. Stel een vergelijking op van de lijn $k$ die $AB$ loodrecht snijdt in het midden van lijnstuk $AB$.
2. Stel een vergelijking op van de lijn $l$ die $AC$ loodrecht snijdt in het midden van lijnstuk $AC$.
3. Bereken de coördinaten van het snijpunt $M$ van $k$ en $l$.
4. Bereken $d(M, A)$.
5. Geef de vergelijking van de cirkel.

- **a** Licht bovenstaand werkschema toe.
- **b** Stel een vergelijking op van de cirkel $c$ door de punten $A(6, 8)$, $B(7, 1)$ en $C(-2, 4)$.

**30** Gegeven zijn de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ met middelpunt $M$ en het punt $A(5, 0)$. De lijnen $k$ en $l$ gaan door $A$ en raken $c$.

- **a** Stel vergelijkingen op van $k$ en $l$.
- **b** Bereken $\angle(k, l)$. Rond af op één decimaal.
- **c** De cirkel $d$ raakt de $x$-as en gaat door $A$ en $M$.
  Stel van $d$ een vergelijking op.



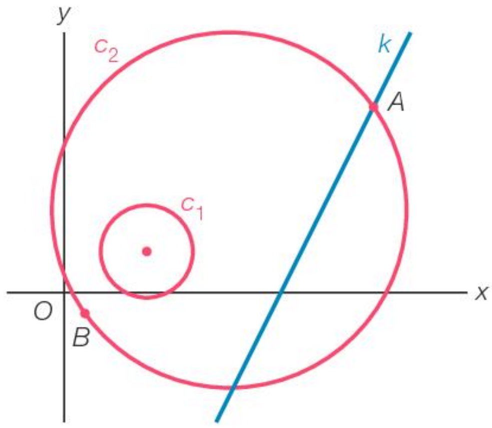

**figuur G.6**

**31** Gegeven zijn de cirkel $c_1$: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$, de lijn $k$: $2x - y = 21$, het punt $A(15, 9)$ op $k$ en het punt $B(1, -1)$. Van de cirkel $c_2$ is $AB$ een middellijn.

**a** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die loodrecht staan op $k$ en $c_1$ raken.

**b** Onderzoek op algebraïsche wijze of $d(A, c_1) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1)$.

**c** Bereken exact $d(c_1, c_2)$.




**figuur G.7**

**32** Gegeven zijn de punten $A(4, 2)$ en $B(4, 0)$, en de cirkel $c$: $x^2 + y^2 = 10$.

**a** Stel vergelijkingen op van de lijnen $k$ met richtingscoëfficiënt 3 die $c$ raken.

**b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $l$ die door $A$ gaan en $c$ raken.

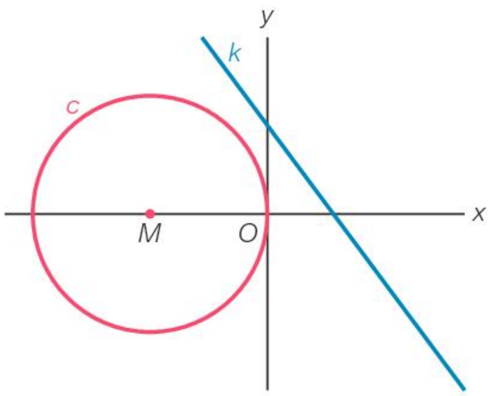
**c** Bereken de hoek tussen de lijnen $m_1$ en $m_2$ die door $B$ gaan en $c$ raken. Rond af op één decimaal.

**33** Gegeven is de cirkel $c$: $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$.

**a** De punten $A$ en $B$ met $x_A = x_B = 5$ en $y_A > y_B$ liggen op $c$. De lijn $k$ raakt $c$ in $A$ en de lijn $l$ raakt $c$ in $B$. Stel van $k$ en van $l$ een vergelijking op.

**b** Stel vergelijkingen op van de lijnen $m$ die $c$ raken en evenwijdig zijn met de lijn $n$: $3x + 2y = 10$.

**34** Gegeven zijn de lijn $k$: $4x + 3y = 9$ en de cirkel $c$: $x^2 + y^2 + 8x = 0$.
De cirkel $d$ is de kleinste cirkel met middelpunt op $k$ die $c$ raakt.
Stel een vergelijking op van $d$.

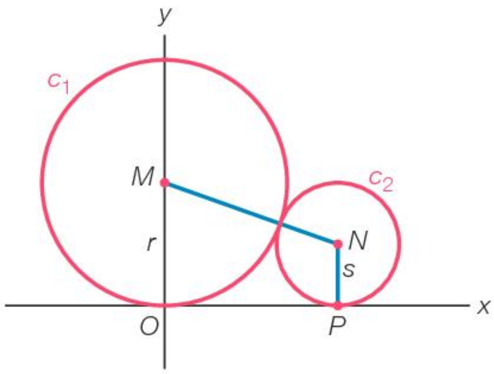



**figuur G.8**

**35** De cirkel met middelpunt $O$ en straal $r$ raakt de lijn $k$ die de assen snijdt in de punten $(2r, 0)$ en $(0, 4)$.
Bereken $r$.

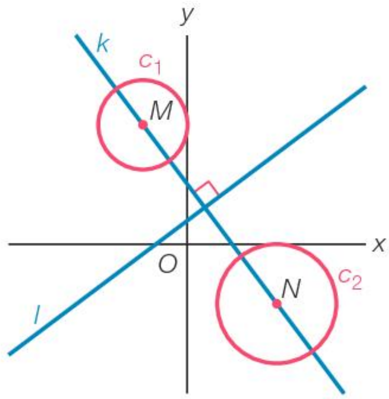
**36** In de figuur hiernaast zijn in een assenstelsel de cirkels $c_1$ en $c_2$ getekend.
Het middelpunt $M$ van $c_1$ ligt op de $y$-as en de straal van $c_1$ is $r$. Het middelpunt van $c_2$ is $N$ en de straal is $s$.
Er geldt $r > s$.
De cirkels raken de $x$-as in de punten $O$ en $P$.
De cirkels raken elkaar.

**a** Neem $r = 9$ en $s = 4$ en bereken exact de oppervlakte van vierhoek $OPNM$.
**b** Toon aan dat de oppervlakte van vierhoek $OPNM$ gelijk is aan $(r + s)\sqrt{rs}$.
**c** Voor welke $r$ en $s$ geldt dat $MN = 25$ en $OP = 15$?




**figuur G.9**

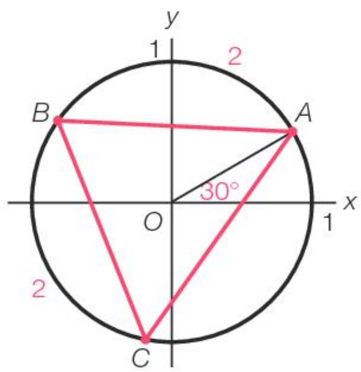
**37** Gegeven is de lijn $k$: $y = -1\frac{1}{3}x + 4$.
De middelpunten $M$ en $N$ van de cirkels $c_1$ en $c_2$ liggen op $k$.
$c_1$ raakt de $y$-as en de straal van $c_1$ is 3.
$c_2$ raakt de $x$-as en de straal van $c_2$ is 4.
Zie de figuur hiernaast.
De lijn $l$ staat loodrecht op $k$ en er geldt $d(l, c_1) = d(l, c_2)$.
Stel algebraïsch een vergelijking op van $l$.




**figuur G.10**

## 8 Goniometrische functies

**38** De hoekpunten van driehoek $ABC$ liggen op de eenheidscirkel zo, dat de cirkelbogen $AB$ en $BC$ lengte 2 hebben. De draaiingshoek van het punt $A$ is 30°. Zie figuur G.11.
Bereken de coördinaten van de punten $A$, $B$ en $C$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

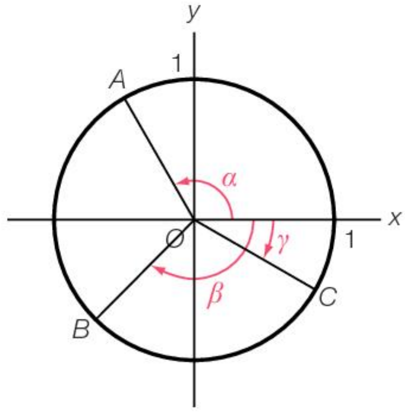



**figuur G.11**

**39** Op de eenheidscirkel liggen de punten $A$, $B$ en $C$.
Gegeven is $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ rad, $x_B = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\gamma = -\frac{1}{6}\pi$ rad.
Zie figuur G.12.
Bereken exact

**a** de coördinaten van $A$
**b** de coördinaten van $C$
**c** $\beta$ in radialen
**d** de lengte van de langste cirkelboog $BC$.

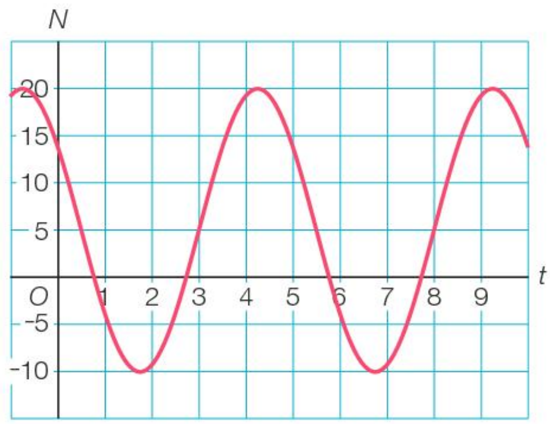



**figuur G.12**

**40** **a** Teken de grafiek van de functie $f(x) = 1 - \sin(\pi x + \frac{1}{2}\pi)$ met domein $[0, 3]$.
**b** Teken de grafiek van de functie $g(x) = 3 + 3\cos(2x - \pi)$ met domein $[-\pi, \pi]$.

**41** Stel bij de sinusoïde in figuur G.13 een formule op van de vorm

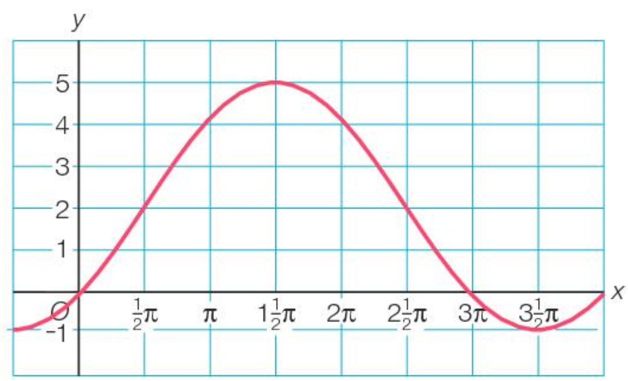
**a** $N = a + b\sin(c(t - d))$ met $b < 0$
**b** $N = a + b\cos(c(t - d))$ met $b > 0$.




**figuur G.13**

**42** In figuur G.14 is een sinusoïde getekend.

**a** Hoe ontstaat deze sinusoïde uit de grafiek van $y = \sin(x)$?
**b** Hoe ontstaat deze sinusoïde uit de grafiek van $y = \cos(x)$?




**figuur G.14**

**43** Bereken exact de oplossingen.

**a** $\sin^2(x + \frac{1}{3}\pi) = 1$
**b** $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) \cdot \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
**c** $\tan(2x - \frac{1}{4}\pi) = \tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi)$
**d** $\sin(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi) \cdot (\cos(\pi x) - 1) = 0$
**e** $\tan^2(\pi x) = \tan(\pi x)$
**f** $\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$

**44** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

**a** $\sin^2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$

**b** $\tan^2(x) = 3$

**c** $\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = 0$

**d** $\cos(2x) - \cos(\frac{1}{2}x) = 0$

**45** Bereken exact de oplossingen in $[0, 5]$.

**a** $\cos(\frac{2}{3}\pi(x-1)) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

**b** $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = \sin(\frac{1}{2}\pi(x-1))$

**c** $\tan(\frac{1}{3}\pi x) + \sqrt{3} = 0$

**d** $\sin^2(\frac{1}{3}\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi x)$

**46** Gegeven is de functie $f(x) = 2 - 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de punten waar de grafiek van $f$ de lijn van de evenwichtsstand snijdt.

**b** Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek.

**c** Los exact op $f(x) \geq 2 - 4\sin(x)$.

**47** **a** Herleid $-\cos(2\pi x - \frac{1}{4}\pi)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

**b** Herleid $-\sin(2(x + 1\frac{1}{4}\pi))$ tot de vorm $\cos(ax + b)$.

**c** Toon aan dat $\sin(2x + \frac{2}{3}\pi) - 2\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ te herleiden is tot $3\cos(2x + \frac{1}{6}\pi)$.

**d** Toon aan dat $\dfrac{\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)}{\sin(2x + \frac{2}{3}\pi)}$ te herleiden is tot $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$.

**48** Differentieer.

**a** $f(x) = x^2 \cdot \sin(3x - \frac{1}{2}\pi)$

**b** $f(x) = \dfrac{x}{2 + \cos(x)}$

**c** $f(x) = x^2 \cdot \cos^3(x)$

**d** $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{\tan^2(x)}$

**e** $f(x) = \sqrt{2\sin(x) + 3\cos(x)}$

**f** $f(x) = \dfrac{5}{4\sin(x) + 3\cos(x)}$

**49** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$ met domein $[0, 2\pi]$.

De afgeleide van $f$ is te herleiden tot $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\sin(x)}{(2 + \sin(x))^2}$.

**a** Toon aan dat deze afgeleide juist is.

Op de grafiek van $f$ ligt het punt $A$ met $x_A = \frac{1}{2}\pi$.

**b** Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn $k$ van de grafiek in $A$.

**c** Bereken exact het bereik van $f$.

# Overzicht GR-modules

| Module | |
|---|---|
| Berekeningen op het basisscherm<br>• Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen<br>• De toets Ans en fouten verbeteren<br>• Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen<br>• Decimaal getal omzetten in breuk | vwo B deel 1<br>hoofdstuk 1<br>bladzijde 14 |
| Formules, grafieken en tabellen<br>• Formules invoeren en grafieken plotten<br>• Functiewaarden berekenen op het grafiekenscherm en op het basisscherm<br>• Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen | vwo B deel 1<br>hoofdstuk 1<br>bladzijde 42 |
| Toppen en snijpunten<br>• Toppen en snijpunten van grafieken<br>• Berekenen van nulpunten | vwo B deel 1<br>hoofdstuk 1<br>bladzijde 42 |
| Helling<br>• De richtingscoëfficiënt van een raaklijn | vwo B deel 1<br>hoofdstuk 2<br>bladzijde 66 |
| Het gebruik van Ans en lettergeheugens<br>• De toets Ans<br>• Het gebruik van lettergeheugens | vwo B deel 1<br>hoofdstuk 3<br>bladzijde 100 |
| Allerlei<br>• Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR | |

# Overzicht routes

## 5 Machten, exponenten en logaritmen

### 5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten

| opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | | |

| opgave | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | | |

### 5.2 Machtsfuncties en wortelfuncties

| opgave | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | |

| opgave | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | | | |

### 5.3 Exponentiële functies

| opgave | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | | | |

| opgave | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | |

## 5.4 Logaritmen

| opgave | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | | | | |

| opgave | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 |
|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | |
| midden | | | | | |
| uitdagend | | | | | |

# 6 Differentiaalrekening

## 6.1 Toppen en buigpunten

| opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | |

| opgave | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | |
| midden | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | |

## 6.2 De afgeleide van machtsfuncties

| opgave | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | |

| opgave | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | |
| midden | | | | | | | | | | | | |
| uitdagend | | | | | | | | | | | | |

### 6.3 De kettingregel

| opgave | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

### 6.4 Functies met parameters

| opgave | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## 7 Meetkunde met coördinaten

### 7.1 Lijnen en hoeken

| opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | | | | |

### 7.2 Afstanden bij punten en lijnen

| opgave | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| basis | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## 7.3 Cirkelvergelijkingen

| opgave | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⧠ basis | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | |

| opgave | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⧠ basis | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | |

## 7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

| opgave | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⧠ basis | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | |

| opgave | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⧠ basis | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | |

# 8 Goniometrische functies

## 8.1 Eenheidscirkel en radiaal

| opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⧠ basis | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | |

| opgave | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⧠ basis | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | |

## 8.2 Sinusoïden

| opgave | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ basis | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## 8.3 Goniometrische vergelijkingen

| opgave | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ basis | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## 8.4 Herleiden en differentiëren

| opgave | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ basis | | | | | | | | | | | | | | |
| ⊙ midden | | | | | | | | | | | | | | |
| ∗ uitdagend | | | | | | | | | | | | | | |

# Trefwoordenregister

# Verantwoording

Illustraties: Richard van de Pol Illustratie & Vormgeving, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

**Colofon**
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services
Shutterstock: p. 6–7, 18, 118, 174
Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 48–49
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 50
Imageselect, Wassenaar: p. 67, 90–91
Frans Hals - Portret René Descartes – Louvre, Parijs: p. 119
iStock: p. 128–129
Mark Ahsmann / Wikipedia: p. 169

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.



**Klimaatneutraal**
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

FSC www.fsc.org
MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 20



ISBN 978-90-01-73539-5

LEERBOEK WISKUNDE B VWO DEEL 2

GEPERSONALISEERD LEREN

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73539-5
9 789001 735395